البرمجة الخطية

أسئلة وتمارين

سؤال رقم (١)

ما المقصود بالبرمجة الخطية وما هى الفروض التى تقوم عليها؟

الحـل

يعتبر أسلوب البرمجة الخطية من الأساليب الرياضية التى تساعد على الاستخدام الكفء للموارد الاقتصادية المتاحة وذلك بهدف تعظيم الأرباح وتخفيض التكاليف والفروض التى تقوم عليها البرمجة الخطية هى

١- الخطية **Linearity**

والمقصود به افتراض وجود علاقات خطية بين متغيرات المشكلة المراد حلها بالبرمجة الخطية أى أن تكون هذه المتغيرات من الدرجة الأولى.

٢- التناسب **Proportionality**

وتعنى هذه الخاصية أن الزيادة أو النقص فى قيم متغيرات دالة الهدف تتناسب طردياً مع الزيادة أو النقص فى قيمة أى من المتغيرات المفردة.

٣- القابلية للإضافة (الجمع) **Additivity**

وتعنى هذه الخاصية اعتماد النتيجة النهائية على التغير فى مجموع قيم المتغيرات.

٤- قابلية التجزئة **Divisibility**

أى أن بعض المتغيرات أو كلها يمكن أن تأخذ قيماً (كسرية) وليست بالضرورة قيماً صحيحة.

٥- التأكد **Certainty**

أى افتراض معلومية جميع المتغيرات وعددها وقيم معاملاتها.

سؤال رقم (٢)

مم يتكون النموذج الرياضى للبرمجة الخطية؟

الحـل

يتكون نموذج البرمجة الخطية من العناصر الأساسية التالية :

١- دالة الهدف **Objective Function**

وهى دالـة رياضية تمثل الهدف الذى نريد الوصول إليه وتحقيقه وقد تكون داله الهدف تعظيم الربح أو تخفيض التكاليف.

٢- القيود **Constrains**

وتتمثل فى موارد محدودة تتنافس على استغلالها واستخدامها مجالات مختلفة ويأتى التعبير عنها فى مشكلة البرمجة الخطية من خلال المتاح من الموارد.

بمعنى أننا نعظم أو نخفض المتغيرات الداخله فى دالة الهدف فى ظل قيود تتمثل فى موارد محدودة.

٣- شرط عدم السلبية **Non-negative Condition**

يشترط على المتغيرات أن تكون غير سالبة أى أن $X_j \geq o$ لأنها تعبر عن كميات إنتاج والكميات لا يمكن أن تكون سالبة.

سؤال رقم (٣)

ما المقصود بكلاً من :

أ- الحل الممكن.

ب- الحل الأمثل.

حـ- المتغيرات الأساسية.

د- متغيرات القرار.

الحـل

أ- **الحل الممكن**

وهو ذلك الحل الذى يحقق جميع القيود.

ب- **الحل الأمثل**

وهو حل ممكن ويحقق دالة الهدف سواء كانت تعظيم أو تخفيض.

جـ- المتغيرات الأساسية

وهى المتغيرات التى يتم إضافتها إلى البرنامج الخطى لتحويله إلى الصيغة القياسية.

د- متغيرات القرار

هى المتغيرات التى تظهر فى دالة الهدف فى البرنامج الخطى ويكون المطلوب تعظيمها أو تخفيضها.

سؤال رقم (٤)

وضح كيف يمكن تحويل الصيغة العامة للبرمجة الخطية إلى الصيغة القياسية Standard form؟

الحـل

١- إضافة المتغيرات المساعدة (S_i) إلى قيود الصيغة العامة للتعبير عن الطاقة غير المستغلة فى حالة ما إذا كان الهدف تعظيم الأرباح وطرحها فى حالة ما إذا كان الهدف تخفيض التكاليف وذلك فى الطرف الأيسر للمتباينة.

٢- إضافة المتغيرات المساعدة إلى دالة الهدف مسبوقة بأصفار فى حالة ما إذا كان الهدف تعظيم وطرحها من دالة الهدف مسبوقة بأصفار فى حالة ما إذا كان الهدف تخفيض.

٣- فى حالة دالة الهدف تخفيض يتم إضافة المتغيرات الصناعية Artificial Variable (A_i) وذلك بعد تحويل القيود إلى معادلات.

٤- أن يتضمن شرط عدم السلبية المتغيرات المساعدة (S_i) بجانب متغيرات الدراسة (X_j). وكذلك يتضمن المتغيرات الصناعية (A_i) فى حالة ما إذا كانت دالة الهدف تخفيض تكاليف.

سؤال رقم (٥)

وضح كيف يمكن تحويل الصيغة العامة للبرمجة الخطية General Form إلى الصيغة القانونية Canonical Form

الحـل

<u>دالة الهدف</u>

إذا كانت دالة الهدف فى الصيغة العامة تخفيض فيتم تحويلها إلى دالة تعظيم فى الصيغة القانونية مع تغيير رمز الدالة وإشارات المتغيرات.

<u>القيود</u>

١- إذا كان القيد أكبر فى الصيغة العامة فيتم تحويله إلى قيد أصغر فى الصيغة القانونية مع تغيير الاشارات الجبرية لطرفى المتباينة.

٢- إذا كان القيد أصغر من فى الصيغة العامة فلا يتم تحويله ويظل كما هو.

٣- إذا كان القيد يساوى فى الصيغة العامة فعند التحويل إلى الصيغة القانونية يتم التعبير عنه بقيدين كلاهما أصغر من مع تغيير الاشارات الجبرية لطرفى المتباينة لأحدهما.

٤- فى حالة المتغيرات الغير مقيدة الاشارة أى أنها يمكن أن تأخذ قيماً موجبه أو سالبة فيتم استبدالها بالفرق بين متغيرين فى دالة الهدف والقيود.

سؤال رقم (٦)

وضح المقصود بالقيود (Constrains) فى مشكلة البرمجة الخطية مع ذكر أهم أشكال هذه القيود؟

الحـل

تتمثل القيود فى موارد محدودة تتنافس على استغلالها واستخدامها مجالات مختلفة ويأتى التعبير عنها فى مشكلة البرمجة الخطية من خلال المتاح من الموارد.

ومن أهم أشكال القيود ما يلى :

<u>١- ندرة عناصر الانتاج</u>

وهذا يتمثل فى محدودية الكمية المتاحة من عناصر الانتاج كالموارد الأولية والالات والعمل ورأس المال.

<u>٢- محدودية الطاقة للموارد المتاحة</u>

بمعنى أن وجود مورد معين لا يعنى بالضرورة قدرته على تلبيه كامل الاحتياجات.

<u>٣- النواحى الفنية والتقنية</u>

بمعنى أن النواحى الفنية تفرض علينا قدراً معنياً من استغلال بعض الموارد.

<u>٤- استيعاب السوق</u>

إن طاقة السوق على استيعاب المنتجات تكون محدودة فى بعض الأحيان وبالتالى لا تستطيع المنشأة بيع منتجاتها بالكامل إذا ما استغلت كامل طاقتها الإنتاجية.

<u>٥- جودة المنتجات والعناصر الداخلة فى الإنتاج</u>

يتطلب ذلك زيادة استغلال بعض الموارد دون الأخرى وتظهر هذه المشكلة فى المنتجات الغذائية حيث أن المنتجات الداخلة فى تركيبه معينة تختلف مكوناتها الغذائية وبالتالى كلما قل العنصر المطلوب فى المادة الخام كلما زادت الكمية المطلوبة منه.

سؤال رقم (٧)

ما المقصود بتحليل الحساسية ولماذا يستخدم؟

الحـل

يقصد بتحليل الحساسية إختبار مدى تأثر الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية بالتغيرات التى من الممكن أن تحدث مثل التغير فى معاملات دالة الهدف أو إضافة متغير جديد أو التغير فى الطاقة المتاحة.

سؤال رقم (٨)

اذكر الأسباب التى تجعل أسلوب السمبلكس أفضل من الحل البيانى فى مشكلة البرمجة الخطية.

الحـل

يعتبر أسلوب السمبلكس أفضل من الحل البيانى للبرمجة الخطية للأسباب الآتية :

١- حل المشاكل التى بها أكثر من متغيرين.

٢- التعامل بطريقة أسهل مع مشاكل تحليل الحساسية.

٣- إيجاد قيم الطاقة الفائضة أو غير المستغلة إن وجدت.

سؤال رقم (٩)

ما المقصود بنموذج البرمجة بالأعداد الصحيحة؟ وما الفرق بينه وبين نموذج البرمجة الخطية العادية؟

الحـل

المقصـود بنمـوذج برمجـة الأعـداد الصـحيحة Integer Programming هـو أحـد النمـاذج الرياضية المشتقة من النموذج الرياضـى العام للبرمجة الخطية حيث يتكون من دالـة هدف ومن قيود وشروط عدم السلبية ولكنـه يختلف عن البرمجة الخطية العادية بأنـه يجب أن يكون قيم المتغيرات فى جدول الحل النهائى (الأمثل) أرقام صحيحة خالية من الكسور.

سؤال رقم (١٠)

وضح المقصود بنماذج النقل؟ ما هى الهدف منها؟

الحـل

تعتبر نماذج النقل من الأساليب الرياضية ذات الأهمية فى عملية اتخاذ القرارات المتعلقة بنقل حجم معين من السلع أو المواد من مصادر متعددة إلى مراكز متعددة وذلك بهدف :

١- تخفيض تكاليف النقل.

٢- تعظيم صافى الأرباح والتى تمثل الفرق بين سعر البيع وتكاليف التصنيع والنقل.

سؤال رقم (١١)

أذكـر أسـباب تفضـيل طريقـة أقـل تكلفـة (LCM) علـى طريقـة الـركن الشـمالى الغربـى (NWCM) فى نماذج النقل؟

الحـل

لأنـه من عيوب طريقة الركن الشمالى الغربـى أنهـا لا تراعـى تكلفة نقل الوحدة المنقولـة ولكن تعتمد علـى موقـع المربـع الواقـع فـى الركن الشـمالى الغربـى فـى جدول النقل مـع أن دالـة الهدف هى تخفيض التكاليف الكلية إلى أقل قيمة ممكنه كما أن الحل الذى يتم الوصول إليه غالباً ما يكون بعيداً عن الحل الأمثل وبالتالى يتم استخدام طريقة أقل تكلفة LCM لمعالجة مثل هذه العيوب حيث يتم التركيز فى هذه الطريقة على أقل تكلفة موجودة فى جدول النقل وبالتالى تحديد كلاً من جهة الطلب والعرض.

سؤال رقم (١٢)

ما المقصود بطريقة حجر الوطء (SSM) فى نماذج النقل وكيف تستخدم؟

الحـل

هى طريقة يتم استخدامها لاختبار هل الحل الأساسى الذى تم الوصول إليه من تطبيق أى طريقة لنماذج النقل هو الحل الأمثل أو الحل الوحيد الذى لا يمكن إيجاد أفضل منه أو أن هناك حلولاً أمثل أخرى ووفقاً لهذه الطريقة يتم تقييم جميع الخلايا الغير مشغوله (الفارغة) فى جدول الحل الأولى لمعرفة تأثير استخدام كل خلية فارغة على مجموع تكاليف النقل ويتم ذلك من خلال عمل مسار مغلق لكل خلية فارغة وإذا وجدنا أن شغل خلية فارغة معينة سيؤدى إلى تقليل تكاليف النقل فيتم تعديل جدول النقل حتى يتم الاستفادة من ذلك وتستمر عملية تقييم كل جدول نقل حتى يتبين أن شغل أى خلية فارغة لن يؤدى إلى تقليل التكاليف.

سؤال رقم (١٣)

ما هى الشروط الواجب مراعاتها عند تكوين المسار المغلق للخلايا الفارغة باستخدام طريقة حجر الوطء (SSM) فى نموذج النقل؟

الحـل

١- أن المسار المغلق يبدأ وينتهى عند الخلية الفارغة المراد تقييمها.

٢- يتكون المسار المغلق من مجموعة من الخطوط الأفقية والرأسية بحيث تقع الخلايا المشغوله عند الزوايا القائمة للمسار المغلق.

٣- وجود مسار مغلق واحد لكل خلية فارغة.

٤- يتم حساب التكلفة لكل خلية فارغة.

٥- يتمن وضع إشارات (+ - + ...) لتكلفة الخلايا التى يمر بها المسار ويشترط أن تكون إشارة التكلفة للخلية الفارغة (+) ثم جمع هذه التكلفة.

٦- يجب أن تكون التكلفة لكل خلية فارغة قيمة موجبة أو مساوية للصفر حتى يكون الحل أمثل.

سؤال رقم (١٤)

ما المقصود بمشكلة التخصيص فى نماذج النقل وما هو أفضل تخصيص؟

الحـل

تعتبر مشكلة التخصيص حالة خاصة من مشاكل النقل وتتعلق بتخصيص عدد معين من الآلات أو الأفراد لإنجاز عدد من الأعمال وذلك عن طريق تخصيص آلة واحدة أو عامل واحد لعمل واحد وهذا يتطلب أن يتساوى عدد الأعمال مع عدد الآلات أو الأفراد الموزعة عليهم هذه الأعمال وأفضل تخصيص هو الذى يؤدى إلى تخفيض التكاليف أو تعظيم الأرباح.

سؤال رقم (١٥)

ضع صح أمام العبارة الصحيحة وعلامة خطأ أمام العبارة الخاطئة فيما يلى مع تصحيح الخطأ :

١- إن الهدف الأساسى من البرمجة الخطية هو إيجاد النهاية العظمى فقط للنموذج الرياضى (×)

الهدف هو إيجاد النهاية العظمى والصغرى لنموذج رياضى

٢- العلاقات فى نموذج البرمجة الخطية هى علاقات غير خطية. (×)

من فروض البرمجة الخطية أن تكون جميع العلاقات خطية سواء دالة الهدف أو القيود.

٣- ليس هناك مانع من أن تكون قيم بعض المتغيرات أو جميعها قيم غير صحيحة. (√)

٤- من المفضل استخدام الحل البيانى إذا كان عدد المتغيرات لا يزيد عن متغيرين. (√)

٥- إن منطقة الحلول الممكنة هى المنطقة التى تحقق جميع القيود معاً. (√)

سؤال رقم (١٦)

ضع صح أمام العبارة الصحيحة وعلامة خطأ أمام العبارة الخاطئة فيما يلى مع تصحيح الخطأ :

١- فى حالة زيادة عدد المتغيرات عن اثنين فإن من المفضل استخدام الحل البيانى (×)

يفضل استخدام أسلوب السمبلكس وذلك تجنباً لصعوبة التعامل مع الهندسة الفراغية.

٢- فى مشكلة تعظيم فإن الحل الأمثل لمشكلة برمجة خطية تكون نقطة فى منطقة الحلول الممكنة ذات أكبر قيمة لدالة الهدف. (√)

٣- فى مشكلة تخفيض فإن الحل الأمثل لمشكلة برمجة خطية تكون نقطة فى منطقة الحلول الممكنة ذات أقل قيمة لدالة الهدف. (√)

٤- إن منطقة الحلول الممكنة لمشكلة البرمجة الخطية هى مجموعة من النقاط التى تحقق قيود البرمجة الخطية وكذلك قيود الإشارة للبرمجة الخطية. (√)

٥- إن نموذج البرمجة الخطية يتضمن ثلاثة عناصر وهى المتغيرات التى تؤثر فى القرار والهدف المراد تعظيمه أو تخفيضه وكذلك القيود المراد تحقيقها. (√)

سؤال رقم (١٧)

مصنع ينتج سلعتين تحتاج كلاً منها إلى ثلاثة أقسام إنتاجية لغرض تصنيعها والجدول التالى يوضح الوقت المتاح لكل قسم انتاجى وكذلك ربح الوحدة.

نوع السلعة	الأقسام الانتاجية			ربح الوحدة
السلعة ١	10	8	3	40
السلعة ٢	7	8	14	35
الساعات المتاحة فى كل قسم انتاجى	39	18	45	

والمطلوب : صياغة هذه المشكلة فى صورة برنامج خطى لتعظيم أرباح المصنع.

الحـل

بفرض أن X_1 تمثل عدد الوحدات من السلعة (1)

X_2 تمثل عدد الوحدات من السلعة (2)

والمطلوب تعظيم أرباح المصنع وأجمالى أرباح المصنع من السلعتين هى مجموع حاصل ضرب ربح الوحدة فى عدد الوحدات المنتجة من السلعتين.

وبالتالى فإن البرنامج الخطى الذى يعبر عن هذه المشكلة يمكن صياغته كما يلى :

Maximize $Z = 40 X_1 + 35 X_2$

Subject to :

$$10X_1 + 7X_2 \leq 30$$

$$8X_1 + 8X_2 \leq 18$$

$$3X_1 + 14X_2 \leq 45$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

سؤال رقم (١٨)

مصنع ينتج نوعين من المنتجات ولديه قسمين إنتاجين والطاقة المتاحة لكل قسم فى الأسبوع هى 26 ساعة للقسم الأول، 30 ساعة للقسم الثانى ويحتاج المنتج الأول إلى 2 ساعة من القسم الأول ، 5 ساعات من القسم الثانى وربح الوحدة منه 40 جنيه.

كما يحتاج المنتج الثانى إلى 4 ساعة من القسم الأول، 3 ساعة من القسم الثانى وربح الوحدة منه هى 60 جنيه.

والمطلوب : صياغة هذه المشكلة فى صورة برنامج خطى لتعظيم أرباح المصنع.

الحل

بفرض أن X_1 تمثل عدد الوحدات من المنتج الأول.

X_2 تمثل عدد الوحدات من المنتج الثانى.

وبالتالى فإن البرنامج الخطى الذى يعبر عن هذه المشكلة يتم صياغته كما يلى:

Maximize $\quad Z = 40X_1 + 60X_2$

Subject to :

$$2X_1 + 4X_2 \leq 26$$

$$5X_1 + 3X_2 \leq 30$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

سؤال رقم (١٩)

مصنع يقوم بإنتاج نوعين من الأجهزة الكهربائية ولديه ثلاثة أقسام إنتاجية والطاقة الإنتاجية لكل قسم هى 36 , 60 , 60 على الترتيب ويحتاج المنتج الأول إلى 0.3 ساعة ، 1 ساعة ، 1.2 ساعة من الأقسام الإنتاجية على الترتيب.

أما المنتج الثانى فيحتاج إلى 0.6 ساعة، 0.8 ساعة ، 0.4 ساعة من الأقسام الإنتاجية على الترتيب وإذا علمت أن ربح الوحدة من المنتج الأول 20 جنيه، ومن المنتج الثانى هى 50.

المطلوب : صياغة هذه المشكلة فى صورة برنامج خطى لتعظيم أرباح المصنع.

الحـل

بفرض أن X_1 تمثل عدد الوحدات من المنتج الأول.

X_2 تمثل عدد الوحدات من المنتج الثانى.

وبالتالى فإن البرنامج الخطى الذى يعبر عن هذه المشكلة يتم صياغته كما يلى:

Maximize $Z = 20 X_1 + 50 X_2$

Subject to :

$$0.3 X_1 + 0.6 X_2 \leq 36$$

$$X_1 + 0.8 X_2 \leq 60$$

$$1.2X_1 + 0.4X_2 \leq 60$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

سؤال رقم (٢٠)

يقوم مصنع للعب الأطفال بإنتاج نوعين من اللعب ويوجد لديه خطين للأنتاج والطاقة القصوى لكلاً منهما هى 100 ساعة، 200 ساعة على الترتيب ويحتاج النوع الأول إلى 5 ساعة من الخط الإنتاجى الأول، إلى 10 ساعة من الخط الثانى ويحتاج النوع الثانى إلى 20 ساعة من الخط الإنتاجى الأول، 10 ساعة من الخط الإنتاجى الثانى وإذا علمت أن ربح الوحدة من النوع الأول هى 5 جنيه ومن النوع الثانى هى 12 جنيه.

المطلوب : صياغة هذه المشكلة فى صورة برنامج خطى لتعظيم أرباح المصنع.

الحـل

بفرض أن X_1 تمثل النوع الأول من اللعب.

X_2 تمثل النوع الثانى من اللعب.

وبالتالى فإن البرنامج الخطى الذى يعبر عن هذه المشكلة يتم صياغته كما يلى:

Maximize $Z = 5 X_1 + 12 X_2$

Subject to :

$5 X_1 + 10 X_2 \leq 100$

$20 X_1 + 10 X_2 \leq 200$

$X_1 , X_2 \geq 0$

سؤال رقم (٢١)

ينتج مصنع نوعين من المنتجات باستخدام نوعين من المواد الخام والجدول التالى يوضح بيانات المشكلة.

المادة الخام	المنتج الأول	المنتج الثانى	الكمية المتاحة يومياً بالطن
المادة الخام (١)	5	3	16
المادة الخام (٢)	2	1	6

فإذا علمت أن ربح الطن الواحد من المنتج الأول (بالألف جنيه) هو 3، ومن المنتج الثانى هو 4.

المطلوب : صياغة هذه المشكلة فى صورة برنامج خطى لتعظيم أرباح المصنع.

الحـل

بفرض أن X_1 تمثل الكمية المنتجة من المنتج الأول.

X_2 الكمية المنتجة من المنتج الثانى.

وبالتالى فإن البرنامج الخطى الذى يعبر عن هذه المشكلة يتم صياغته كما يلى:

Maximize $Z = 3 X_1 + 4 X_2$

Subject to :

$$5 X_1 + 3 X_2 \leq 16$$

$$2 X_1 + X_2 \leq 6$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

سؤال رقم (٢٢)

شركة لإنتاج الأدوات المنزلية تقوم بإنتاج منتجين يتم تصنيعهما من الأخشاب وتمر العمليات الصناعية لإنتاج كلا المنتجين بقسمين انتاجيين هى قسم تقطيع وتجميع الأخشاب وقسم الطلاء والطاقة المتاحة للقسم الأول 60 ساعة يومياً بينما الطاقة المتاحة للقسم الثانى هى 48 ساعة يومياً.

وتحتاج الوحدة الواحدة من المنتج الأول إلى 4 ساعة من القسم الأول، 2 ساعة من القسم الثانى بينما تحتاج الوحدة الواحدة من المنتج الثانى إلى 2 ساعة من القسم الأول، 4 ساعة من القسم الثانى.

فإذا علمت أن التكلفة المتغيرة للوحدة من المنتج الأول هى 40 جنيه ومن المنتج الثانى هى 30 جنيه ويبلغ سعر الوحدة من المنتج الأول 48 جنيه بينما سعر بيع الوحدة من المنتج الثانى هى 36 جنيه.

المطلوب : صياغة هذه المشكلة فى صورة برنامج خطى لتعظيم أرباح الشركة.

الحـل

بفرض أن X_1 : تمثل عدد الوحدات المطلوب إنتاجها من المنتج الأول.

X_2 : تمثل عدد الوحدات المطلوب إنتاجها من المنتج الثانى.

ولإيجاد ربح الوحدة من كل منتج :

ربح الوحدة = سعر البيع – التكلفة المتغيرة.

ربح الوحدة من المنتج الأول = 48 – 40 = 8 جنيه

ربح الوحدة من المنتج الثانى = 36 – 30 = 6 جنيه

وبالتالى فإن البرنامج الخطى الذى يعبر عن هذه المشكلة يتم صياغته كما يلى:

Maximize $\qquad Z = 8 X_1 + 6 X_2$

Subject to :

$$4 X_1 + 2 X_2 \leq 60$$

$$2 X_1 + 4 X_2 \leq 48$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

سؤال رقم (٢٣)

تفكر إحدى الشركات الصناعية الكيميائية فى تسويق منتجها الجديد الذى يتمثل فى خلطة وزنها 500 كيلو جرام تتكون من عنصرين أساسيين وتقتضى شروط الجودة أن لا تتضمن الخلطة ما يزيد عن 400 كيلو جرام من العنصر الأول وأن تتضمن هذه الخلطة على الأقل 200 كيلو جرام من العنصر الثانى فإذا علمت أن تكلفة الكيلو جرام من العنصر الأول هى 5 جنيه ومن العنصر الثانى 8 جنيه.

المطلوب : صياغة هذه المشكلة فى صورة برنامج خطى لتخفيض التكاليف.

الحـل

بفرض أن X_1 تمثل عدد الكيلو جرامات الداخلة فى الخلطة من العنصر الأول.

X_2 تمثل عدد الكيلو جرامات الداخلة فى الخلطة من العنصر الثانى.

وبالتالى فإن البرنامج الخطى الذى يعبر عن هذه المشكلة يتم صياغته كما يلى:

Maximize $Z = 5 X_1 + 8 X_2$

Subject to :

(١) قيد الحد الأقصى لكمية العنصر الأول $X_1 \leq 400$

(٢) قيد الحد الأدنى لكمية العنصر الثانى $X_2 \geq 200$

(٣) قيد وزن الخلطة $X_1 + X_2 = 50$

(٤) قيد عدم السلبية $X_1 , X_2 \geq 0$

سؤال رقم (٢٤)

تحتاج إحدى المؤسسات لإنتاج مادة معينة يدخل فى تركيبها المادة (X_1) والمادة (X_2) وأن المؤسسة تحتاج إلى 50 ساعة عمل أو أقل من المادة الأولى وعلى الأقل 100 ساعة من المادة الثانية كما تحتاج إلى ما مجموعة 200 ساعة للمادتين.

فإذا علمت أن تكلفة المادة الأولى هى 2 جنيه للوحدة الواحدة وتكلفة المادة الثانية هى 4 جنيه للوحدة.

المطلوب : صياغة هذه المشكلة فى صورة برنامج خطى لتخفيض التكاليف.

الحـل

Maximize $Z = 2 X_1 + 4 X_2$

Subject to :

$X_1 \leq 50$ (1)

$X_2 \geq 100$ (2)

$X_1 , X_2 = 200$ (3)

$X_1 , X_2 \geq 0$

سؤال رقم (٢٥)

تنتج شركة ما 3 مواد بحيث تمر هذه المواد فى ثلاثة مراحل إنتاجية وتحتاج المادة الأولى إلى 1 ساعة، 3 ساعة، 1 ساعة من المراحل الإنتاجية الثلاثة على الترتيب. بينما تحتاج المادة الثانية إلى 2 ساعة من المرحلة الأولى، 4 ساعة من المرحلة الثانية والمادة الثالثة تحتاج إلى 1 ساعة من المرحلة الأولى، 2 ساعة من المرحلة الثانية وقد كان الساعات المتاحة لكل مرحلة هى 430، 460، 420 على الترتيب. فإذا علمت أن ربح الوحدة الواحدة من المواد الثلاثة هو 3، 2 ، 5 جنيه على التوالى.

المطلوب : صياغة هذه المشكلة فى صورة برنامج خطى لتعظيم الأرباح.

الحـل

بفرض أن عدد الوحدات من المادة الأولى X_1

وعدد الوحدات من المادة الثانية X_2

وعدد الوحدات من المادة الثالثة هى X_3

وبالتالى فإن النموذج الخطى للبرمجة يكون كما يلى :

Maximize $Z = 3\,X_1 + 2\,X_2 + 5\,X_3$

Subject to :

$X_1 + 2\,X_2 + X_3 \leq 430$

$3\,X_1 + 2\,X_3 \leq 460$

$X_1 + 4\,X_2 \leq 40$

$X_1\,,\,X_2\,,\,X_3 \geq 0$

سؤال رقم (٢٦)

مصنع يقوم بإنتاج نوعين من المنتجات من خلال مرحلتين إنتاجيتين فإذا كانت الوحدة من النوع الأول تحتاج إلى 6 ساعة فى المرحلة الأولى، 8 ساعة فى المرحلة الثانية والوحدة من النوع الثانى تحتاج إلى 6 ساعة فى المرحلة الأولى، 4 ساعة فى المرحلة الثانية وكان عدد ساعات العمل المتاحة فى المرحلة الأولى 300 ساعة وفى المرحلة الثانية 320 ساعة. فهما هو حجم الإنتاج الواجب إنتاجه من كل نوع لتحقيق أكبر ربح ممكن إذا علمت أن ربح الوحدة من النوع الأول 12 جنيه ومن النوع الثانى 10 جنيه.

الحل

بناء النموذج الرياضى الذى يمثل هذه المشكلة بفرض أن

X_1 تمثل عدد الوحدات من النوع الأول.

X_2 تمثل عدد الوحدات من النوع الثانى.

Maximize $Z = 12\,X_1 + 10\,X_2$

Subject to :

$6\,X_1 + 6\,X_2 \leq 300$

$8X_1 + 4\,X_2 \leq 320$

$X_1\,,\,X_2 \geq 0$

الحل

١- تحديد النقاط الخاصة بكل قيد

القيد الأول : $6X_1 + 6X_2 = 300$

$X_1 = 0 \qquad \therefore X_2 = \frac{300}{6} = 50$

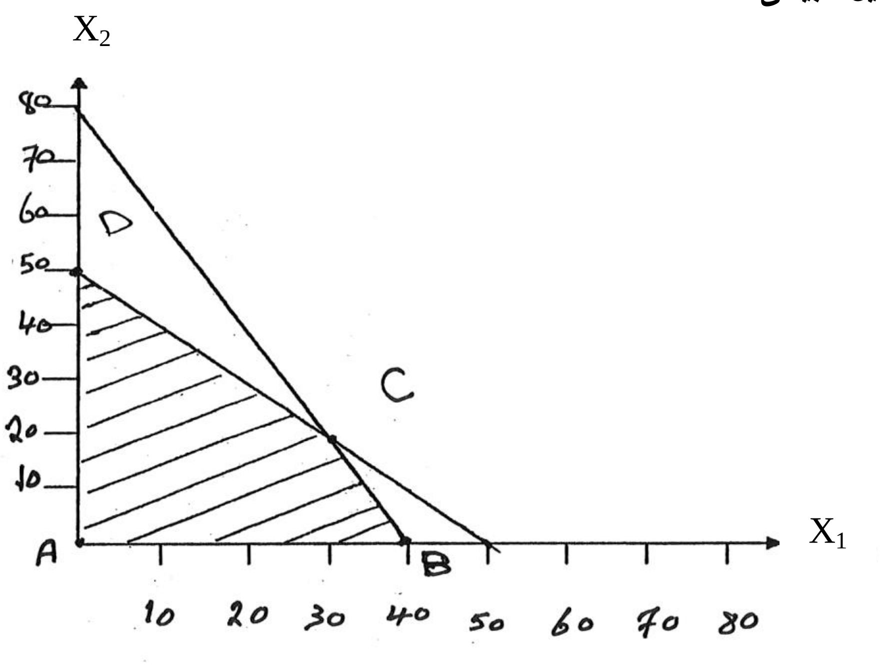
$X_2 = 0 \qquad \therefore X_1 = \frac{300}{6} = 50$

القيد الثانى : $8X_1 + 4X_2 = 320$

$X_1 = 0 \qquad \therefore X_2 = \frac{320}{4} = 80$

$X_2 = 0 \qquad \therefore X_1 = \frac{320}{8} = 40$

٢- التمثيل البيانى :



من الشكل السابق نجد أن نقاط الحل الأساسية هى :

(0 , 50) D , (30 , 30) C , (40 , 0) B , (0 , 0) A

والنقطة C تم إيجادها عن طريق حل المعادلتين الأتيتين :

$6X_1 + 6X_2 = 300$

$8X_1 + 4X_2 = 320$

بضرب المعادلة الأولى × $\frac{8}{6}$ والطرح من المعادلة الثانية

$\therefore 8 X_1 + 8 X_2 = 400$

$8 X_1 + 4 X_2 = 30$ بالطرح

$4X_2 = 80$

$\therefore X_2 = \frac{80}{4} = 20$

بالتعويض عن قيمة X_2 فى المعادلة الأولى

$6 X_1 + 6 X_2 = 300$

$6 X_1 + 6 \times 20 = 300$

$\therefore 6 X_1 = 300 - 120$

$\therefore X_1 = \frac{180}{6} = 30$

٣- ولإيجاد الحل الأمثل يتم التعويض بهذه النقاط فى معادلة دالة الهدف

النقطة	احداثياتها	دالة الهدف (Z)
A	(0 , 0)	0
B	(40 , 0)	480
C	(30 , 20)	560
D	(0 , 50)	500

الحل الأمثل هو النقطة (C) حيث تعطى أكبر قيمة لدالة الهدف وبالتالى يجب انتاج 30 وحدة من النوع الأول، 20 وحدة من النوع الثانى.

سؤال رقم (٢٧)

أوجد القيمة العظمى لدالة الهدف الآتية :

Maximize $Z = 20 X_1 + 40 X_2$

Subject to :

$4 X_1 + 2 X_2 \leq 160$

$X_1 + 4X_2 \leq 120$

$4X_1 + 6X_2 \leq 240$

$X_1, X_2 \geq 0$

الحـل

١- تحديد النقاط الخاصة بكل قيد

القيد الأول : $4X_1 + 2X_2 = 160$

$X_1 = 0 \qquad \therefore X_2 = \frac{160}{2} = 80$

$X_2 = 0 \qquad \therefore X_1 = \frac{160}{4} = 40$

القيد الثانى : $X_1 + 4X_2 = 120$

$X_1 = 0 \qquad \therefore X_2 = \frac{120}{4} = 30$

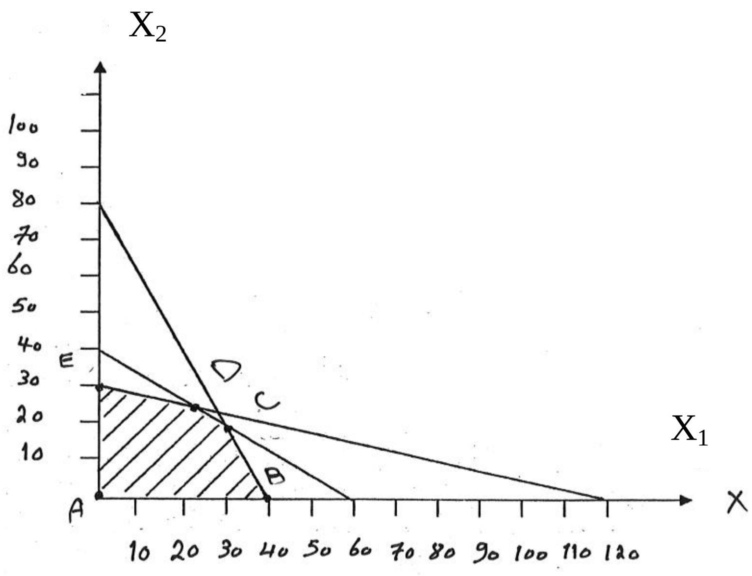
$X_2 = 0 \qquad \therefore X_1 = \frac{120}{1} = 120$

القيد الثالث : $4X_1 + 6X_2 = 240$

$X_1 = 0 \qquad \therefore X_2 = \frac{240}{2} = 40$

$X_2 = 0 \qquad \therefore X_1 = \frac{240}{4} = 60$

٢- التمثيل البيانى



من الرسم السابق يتضح أن نقاط الحلول الأساسية هى

(30 , 20) C , (40 , 0) B , (0 , 0) A

(0 , 30) E , (24 , 24) D

وتم تحديد النقطة (C) بحل المعادلتين الآتيتين

$$4X_1 + 2X_2 = 160$$

$$4X_1 + 6X_2 = 240$$

بالطرح

$$-4X_2 = -80$$

$$\therefore X_2 = \frac{-80}{-4} = 20$$

بالتعويض فى المعادلة الأولى عن قيمة X_2

$$4X_1 + 2(20) = 160$$

$$\therefore 4X_1 + 40 = 160$$

$$\therefore X_1 = \frac{120}{4} = 30$$

ويمكن إيجاد النقطة D بحل المعادلتين الآتيتين :

$$X_1 + 4X_2 = 120$$

$$4X_1 + 6X_2 = 240$$

بضرب المعادلة الأولى × 4 وطرحها من المعادلة الثانية

يتم ايجاد قيمة $X_2 = = \frac{240}{10}$ 24 وبالتعويض فى المعادلة الأولى عن قيمة X_2

$X_1 + 4 X_2 = 120$

$X_1 + 4 (24) = 120$

$\therefore X_1 = 120 - 96 = 24$

٣- التعويض بالنقاط السابقة فى دالة الهدف

النقطة	احداثياتها	دالة الهدف (Z)
A	(0 , 0)	0
B	(40 , 0)	800
C	(30 , 20)	1400
D	(24 , 24)	1440
E	(0 , 30)	1200

من الجدول السابق يتضح أن الحل الأمثل هو النقطة D حيث تكون دالة الهدف أكبر قيمة.

سؤال رقم (٢٨)

المطلوب تعظيم دالة الهدف الآتية

Maximize $Z = 5 X_1 + 8 X_2$

Subject to :

$2 X_1 + 4 X_2 \leq 20$

$3X_1 \leq 12$

$4X_2 \leq 16$

$X_1 , X_2 \geq 0$

الحـل

١- تحديد النقاط الخاصة بكل قيد

<u>القيد الأول :</u>

$$2X_1 + 4X_2 = 20$$

$X_1 = 0 \qquad \therefore X_2 = \dfrac{20}{4} = 5$

$X_2 = 0 \qquad \therefore X_1 = \dfrac{20}{2} = 10$

<u>القيد الثانى :</u>

$3X_1 = 12$

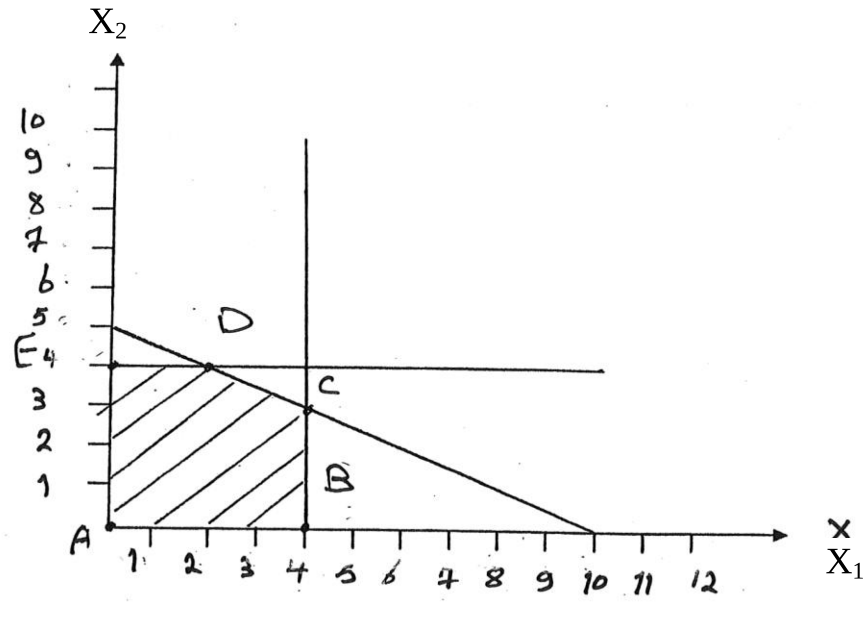
$X_1 = \dfrac{12}{3} = 4$

<u>القيد الثالث :</u>

$4X_2 = 16$

$X_2 = \dfrac{16}{4} = 4$

٢- التمثيل البيانى



من الرسم السابق يتضح أن نقاط الحلول الأساسية هى

(4 , 3) C , (0 , 4) B , (0 , 0) A

(4 , 0) E , (2 , 4) D

وتم إيجاد إحداثيات النقطة C بحل المعادلتين الآتيتين

$2X_1 + 4X_2 = 20$

$3X_1 = 12$ $\qquad\qquad X_1 = \frac{12}{3} = 4$

وبالتعويض عن $X_1 = 4$ فى المعادلة الأولى يتم إيجاد قيمة $X_2 = 3$

ثم إيجاد النقطة D وذلك بحل المعادلتين الآتيتين :

$2X_1 + 4X_2$

$4X_2 = 16$ $\qquad\qquad X_2 = \frac{16}{4} = 4$

وبالتعويض فى المعادلة الأولى عن قيمة $X_2 = 4$ يتم ايجاد $X_1 = 2$

٣- التعويض بالنقاط السابقة فى معادلة دالة الهدف

النقطة	احداثياتها	دالة الهدف (Z)
A	(0 , 0)	0
B	(4 , 0)	20
C	(4 , 3)	44
D	(2 , 4)	42
E	(0 , 4)	32

∴ الحل الأمثل هو النقطة C لأنها تعطى أكبر ربح ممكن.

سؤال رقم (٢٩)

المطلوب تخفيض دالة الهدف الآتية

Minimize $\qquad Z = 20X_1 + 10X_2$

Subject to :

$$X_1 + 2X_2 \geq 20$$

$$3X_1 + 2X_2 \geq 42$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

الحـل

١- تحديد النقاط الخاصة بكل قيد

القيد الأول : $X_1 + 2\,X_2 = 20$

$X_1 = 0 \qquad \therefore X_2 = \dfrac{20}{2} = 10$

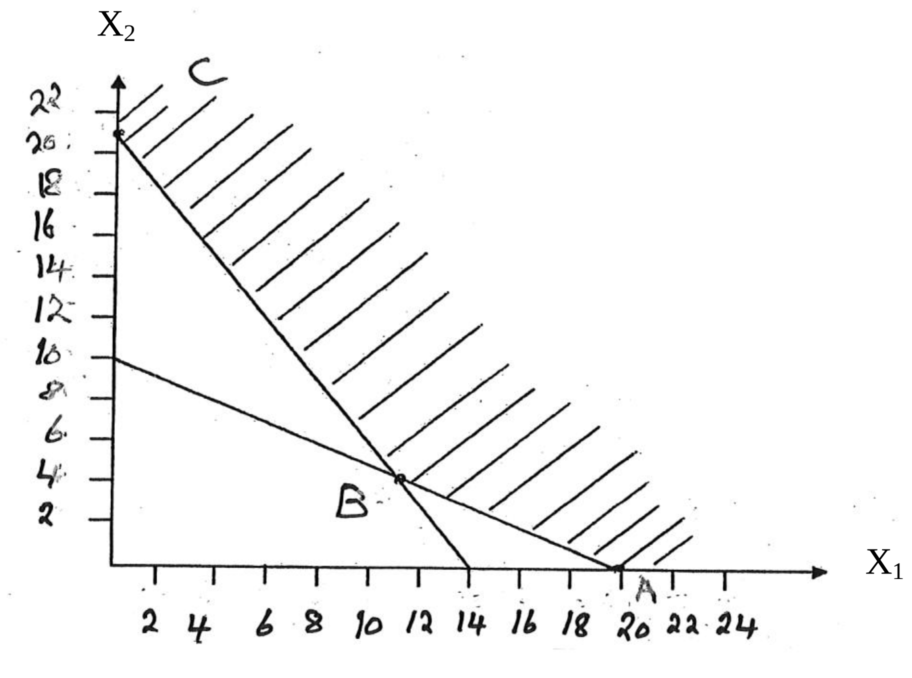
$X_0 = 0 \qquad \therefore X_1 = 20$

القيد الثانى : $3X_1 + 2\,X_2 = 42$

$X_1 = 0 \qquad \therefore X_2 = \dfrac{42}{2} = 21$

$X_2 = 0 \qquad \therefore X_1 = \dfrac{42}{3} = 14$

٢- التمثيل البيانى



من الرسم السابق يتضح أن نقاط الحلول الأساسية هى

(0 , 21) C , (11 , 4.5) B , (20 , 0) A

وتم تحديد النقطة B بحل المعادلتين

$X_1 + 2X_2 = 20$

$3 X_1 + 2 X_2 = 42$

بضرب المعادلة الأولى × 3 والطرح من الثانية

$\therefore 4 X_2 = 18$

$X_2 = \frac{18}{2} = 4.5$

بالتعويض عن قيمة X_2 فى المعادلة الأولى ينتج قيمة $X_1 = 11$

$\therefore$ النقطة B (11 , 4.5)

٣- التعويض بالنقاط السابقة فى معادلة دالة الهدف

النقطة	احداثياتها	دالة الهدف (Z)
A	(20 , 0)	400
B	(11 , 4.5)	265
C	(0 , 21)	210

الحل الأمثل هو النقطة (C) لأنها تعطى أقل قيمة لدالة الهدف.

سؤال رقم (٣٠)

تخفيض دالة الهدف التالية

Minimize $Z = 5 X_1 + 6 X_2$

Subject to :

$4X_1 + 6 X_2 \geq 36$

$4X_1 + 3 X_2 \geq 24$

$X_1 , X_2 \geq 0$

الحـل

١- تحديد النقاط الخاصة بكل قيد

<u>القيد الأول :</u>

$$4X_1 + 6\,X_2 = 36$$

$X_1 = 0$ $\qquad$ $X_2 = \dfrac{36}{6} = 6$

$X_0 = 0$ $\qquad$ $X_1 = \dfrac{36}{4} = 9$

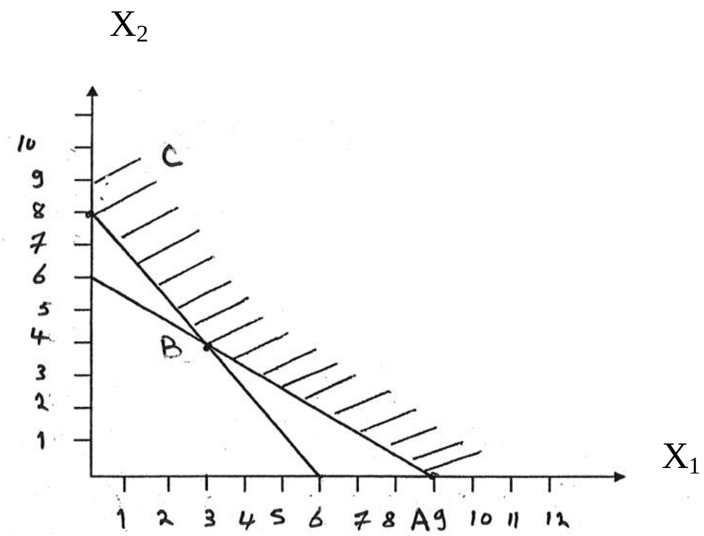
<u>القيد الثانى :</u>

$$4X_1 + 3\,X_2 = 24$$

$X_1 = 0$ $\qquad$ $X_2 = \dfrac{24}{3} = 8$

$X_2 = 0$ $\qquad$ $X_1 = \dfrac{24}{4} = 6$

٢- التمثيل البيانى



من الرسم السابق نجد أن نقاط الحلول الأساسية هى

(0 , 8) C , (3 , 4) B , (0 , 9) A

ويتم إيجاد النقطة B عن طريق حل المعادلتين الآتيتين

$$4\,X_1 + 6\,X_2 = 36$$
$$4\,X_1 + 3X_2 = 24$$

بالطرح

$$\therefore\ 3\,X_2 = 12$$

$$X_2 = \frac{12}{3} = 4$$

وبالتعويض من قيمة X_2 فى المعادلة الأولى نجد أن قيمة $X_1 = 3$

∴ النقطة $B = (3 , 4)$

٣- التعويض بنقاط الحلول الأساسية فى معادلة دالة الهدف

النقطة	احداثياتها	دالة الهدف
A	(0 , 9)	45
B	(3 , 4)	39
C	(0 , 8)	48

∴ الحل الأمثل هو النقطة B لأنها تعطى أقل تكلفة.

سؤال رقم (٣١)

المطلوب تخفيض دالة الهدف الآتية.

Minimize $Z = 30 X_1 + 40 X_2$

Subject to :

$20 X_1 + 10 X_2 \geq 240$

$10X_1 + 20 X_2 \geq 200$

$10X_1 + 10X_2 \geq 160$

$X_1 , X_2 \geq 0$

الحـل

١- تحديد النقاط الخاصة بكل قيد

<u>القيد الأول :</u> $20 X_1 + 10 X_2 = 240$

$X_1 = 0 \quad \therefore X_2 = \frac{240}{10} = 24$

$X_2 = 0 \quad \therefore X_1 = \frac{240}{20} = 12$

<u>القيد الثانى :</u> $10\,X_1 + 20X_2 = 200$

$X_1 = 0 \qquad \therefore\; X_2 = \dfrac{200}{20} = 10$

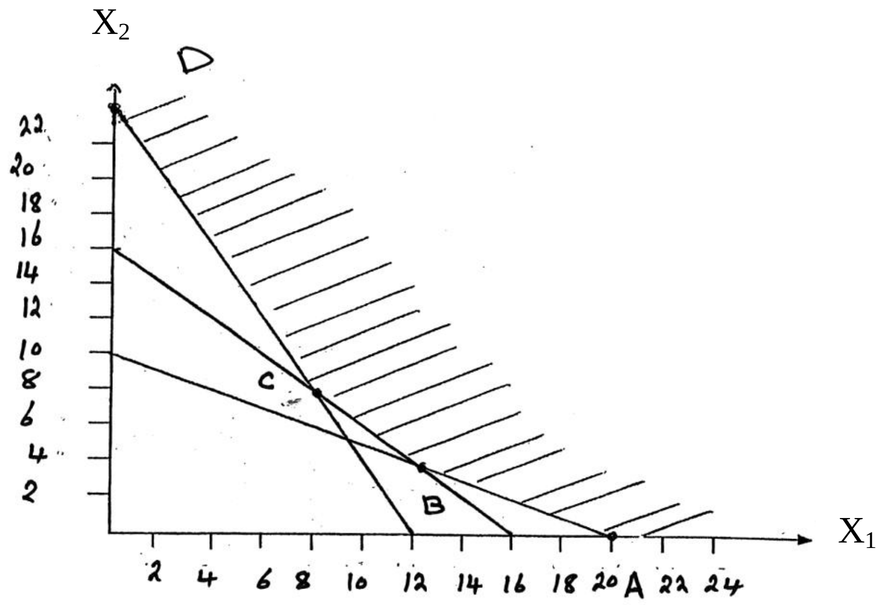
$X_2 = 0 \qquad \therefore\; X_1 = \dfrac{200}{10} = 20$

<u>القيد الثالث :</u> $10\,X_1 + 20X_2 = 160$

$X_1 = 0 \qquad \therefore\; X_2 = \dfrac{160}{10} = 16$

$X_2 = 0 \qquad \therefore\; X_1 = \dfrac{160}{10} = 16$

٢– التمثيل البيانى :



من الرسم السابق نجد أن نقاط الحلول الأساسية هى

(0 , 24) D , (8 , 8) C , (12 , 4) B , (20 , 0) A

وتم تحديد النقطة B لحل المعادلتين الآتيتين

$10\,X_1 + 20\,X_2 = 200$

$10\,X_1 + 10\,X_2 = 160$

بالطرح

$\therefore\; 10\,X_2 = 40 \qquad X_2 = \dfrac{40}{10} = 4$

وبالتعويض فى المعادلة الأولى عن قيمة $X_2 = 4$ نحصل على قيمة $X_1 = 12$

، ثم تحديد النقطة (C) وذلك بحل المعادلتين الآتيتين :

$$20 X_1 + 10 X_2 = 240$$

$$10 X_1 + 10X_2 = 160$$

بالطرح

$$\therefore 10 X_1 = 80 \qquad X_1 = \frac{80}{10} = 8$$

وبالتعويض فى المعادلة الأولى نحصل على قيمة $X_1 = 8$

٣- التعويض بالنقاط السابقة فى معادلة دالة الهدف

النقطة	احداثياتها	دالة الهدف
A	(20 , 0)	600
B	(12 , 4)	520
C	(8 , 8)	560
D	(0 , 24)	960

مما سبق يتضح أن الحل الأمثل هو النقطة B لأنها تعطى أقل تكلفة

سؤال رقم (٣٢)

المطلوب تعظيم دالة الهدف الآتية.

Maximize $\quad Z = 2 X_1 + X_2$

Subject to :

$$X_1 + X_2 \leq 10$$

$$X_1 \leq 4$$

$$X_2 \leq 2$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

الحـل

١- تحديد النقاط الخاصة بكل قيد

القيد الأول : $X_1 + X_2 = 10$

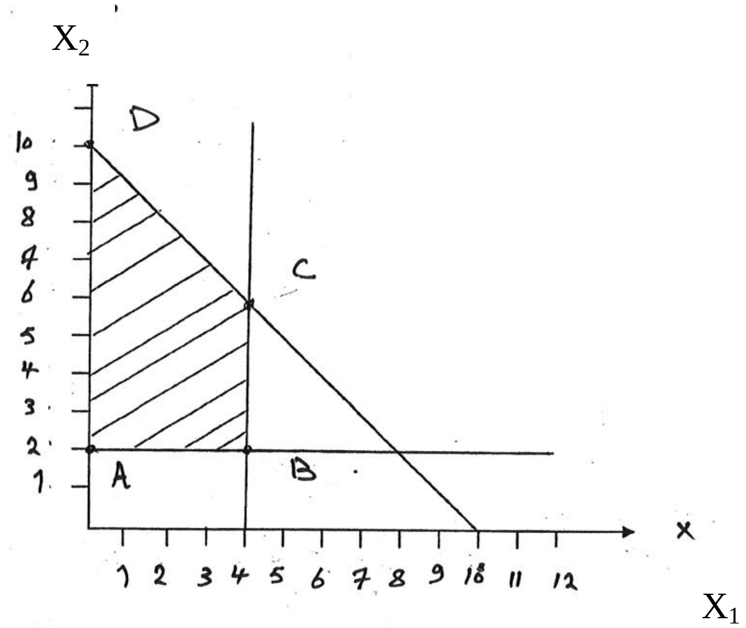
$X_1 = 0 \quad \therefore X_2 = 10$

$X_2 = 0 \quad \therefore X_1 = 10$

القيد الثانى : $X_1 = 4$

القيد الثالث : $X_2 = 2$

٢- التمثيل البيانى



من الشكل السابق يتضح أن نقاط الحلول الأساسية هى

(0 , 10) D , (4 , 6) C , (4 , 2) B , (0 , 2) A

٣- التعويض فى معادلة دالة الهدف

دالة الهدف (Z)	احداثياتها	النقطة
2	(0 , 2)	A
10	(4 , 2)	B
14	(4 , 6)	C
10	(0 , 10)	D

من الجدول السابق نجد أن الحل الأمثل هو النقطة C لأنها تعطى أكبر قيمة لدالة الهدف

سؤال رقم (٣٣)

أوجد النهاية العظمى للدالة الآتية

Maximize $Z = 4X_1 + 3X_2$

Subject to :

$3X_1 + 3X_2 \leq 30$

$5X_1 + X_2 \geq 20$

$X_1 + 4X_2 \geq 16$

$X_1 , X_2 = 0$

الحـل

١- تحديد النقاط الخاصة بكل قيد

<u>**القيد الأول :**</u> $3X_1 + 3X_2 = 30$

$X_1 = 0 \quad \therefore X_2 = \frac{30}{3} = 10$

$X_2 = 0 \quad \therefore X_1 = \frac{30}{3} = 10$

<u>**القيد الثانى :**</u> $5X_1 + X_2 = 20$

$X_1 = 0 \quad \therefore X_2 = 20$

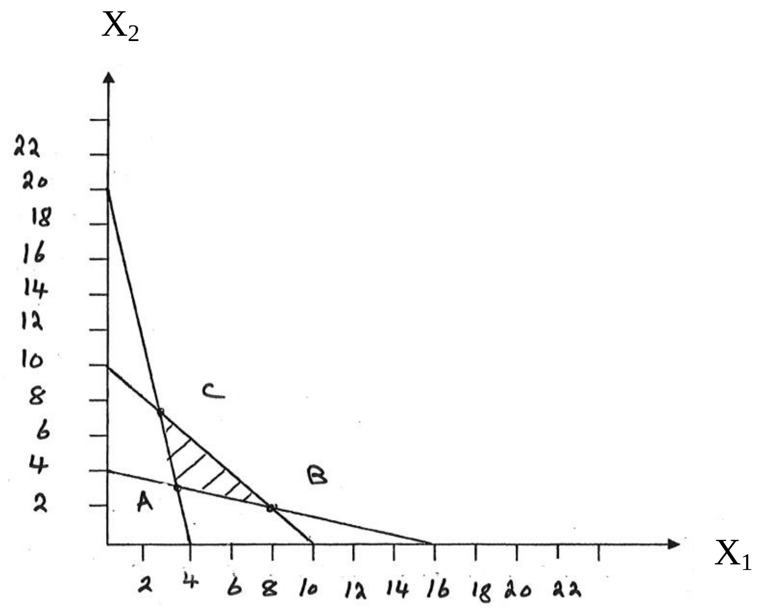
$X_2 = 0 \quad \therefore X_1 = \frac{20}{5} = 4$

<u>**القيد الثالث :**</u> $X_1 + 4X_2 = 16$

$X_1 = 0 \quad \therefore X_2 = \frac{16}{4} = 4$

$X_2 = 0 \quad \therefore X_1 = 16$

٢- التمثيل البيانى



يلاحظ من الرسم السابق أن نقاط الحل الأساسية هى النقاط

A (3.5 , 3) , B (8 , 2) , C (2.5 , 7.5)

تم تحديد النقطة (A) بحل المعادلتين الآتيتين

$5 X_1 + X_2 = 20$

$X_1 + 4X_2 = 16$

بضرب المعادلة الثانية × 5 والطرح من المعادلة الأولى ينتج قيمة $X_2 = 3$

وبالتعويض فى المعادلة الأولى عن قيمة X_2 ينتج قيمة $X_1 = 3.5$

وبالتالى تصبح النقطة A = (3 , 5 , 3)

تحديد النقطة (B) بحل المعادلتين الأولى والثالثة، بالتالى النقطة B = (8 , 2)

، تحديد النقطة (C) بحل المعادلتين الأولى والثانية ، بالتالى النقطة C = (2.5 , 7.5)

٣- التعويض بالنقاط السابقة فى معادلة الهدف كما يلى :

النقطة	احداثياتها	دالة الهدف (Z)
A	(3.5 , 3)	23
B	(8 , 2)	38
C	(2.5 , 7.5)	32.5

من الجدول السابق نجد أن الحل الأمثل هو النقطة (B) لانها تعطى أكبر ربح وهو 38

سؤال رقم (٣٤)

المطلوب تعظيم دالة الهدف الآتية

Maximize $Z = 40 X_1 + 50 X_2$

Subject to :

$X_1 + 2 X_2 \leq 12$

$5X_1 + 4X_2 \leq 30$

$3X_1 + X_2 \leq 15$

$X_1 , X_2 \geq 0$

الحـل

١ – تحديد النقاط الخاصة بكل قيد

القيد الأول : $X_1 + 2 X_2 = 12$

$X_1 = 0$ $X_2 = \frac{12}{2} = 6$

$X_2 = 0$ $X_1 = 12$

القيد الثانى : $5 X_1 + 4X_2 = 30$

$X_1 = 0$ $X_2 = \frac{30}{4} = 7.5$

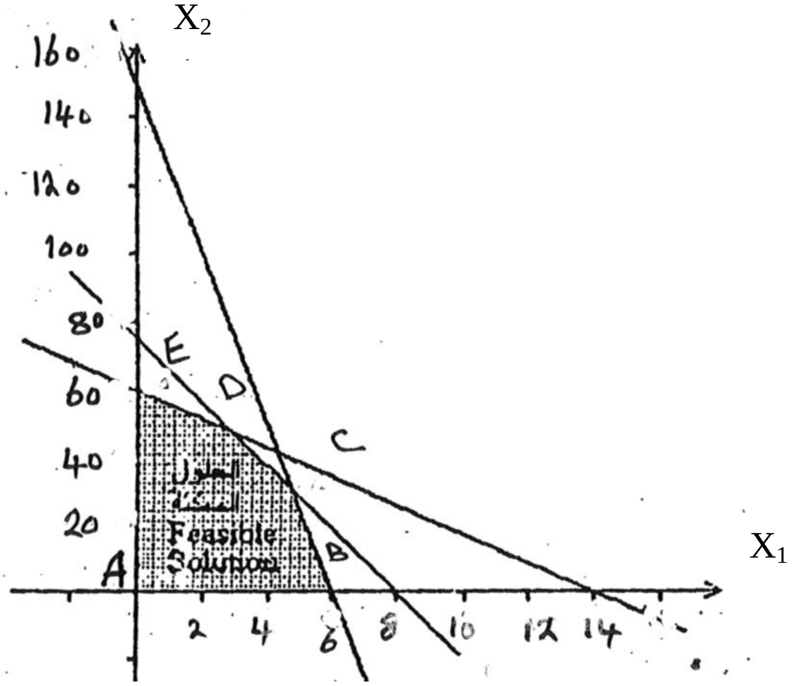
$X_2 = 0$ $X_1 = \frac{30}{5} = 6$

القيد الثالث : $3X_1 + X_2 = 15$

$X_1 = 0$ $X_2 = 15$

$X_2 = 0$ $X_1 = \frac{15}{3} = 5$

٢- التمثيل البيانى



من الرسم السابق يتضح أن نقاط الحلول الأساسية

(4 , 2) C , (5 , 0) B , (0 , 0) A

(0 , 6) E , (2 , 5) D

٣- التعويض فى دالة الهدف بالنقاط السابقة

دالة الهدف (Z)	احداثياتها	النقطة
0	(0 , 0)	A
200	(5 , 0)	B
260	(4 , 2)	C
330	(2 , 5)	D
300	(0 , 6)	E

وبالتالى فإن النقطة D تمثل الحل الأمثل لأنها تعطى أكبر قيمة لدالة الهدف

سؤال رقم (٣٥)

المطلوب تعظيم دالة الهدف الأتية

Maximize $Z = 150\ X_1 + 85\ X_2$

Subject to :

$$X_1 + 2\ X_2 \le 160$$

$$2X_1 + 0.5X_2 \le 120$$

$$2X_1 + 1.6\ X_2 \le 160$$

$$X_1\ ,\ X_2 \ge 0$$

الحـل

١- تحديد النقاط الخاصة بكل قيد

القيد الأول : $X_1 + 2\ X_2 = 160$

$X_1 = 0$ $\qquad X_2 = \dfrac{160}{2} = 80$

$X_2 = 0$ $\qquad X_1 = 160$

القيد الثانى : $2\ X_1 + 0.5X_2 = 120$

$X_1 = 0$ $\qquad X_2 = \dfrac{120}{0.5} = 240$

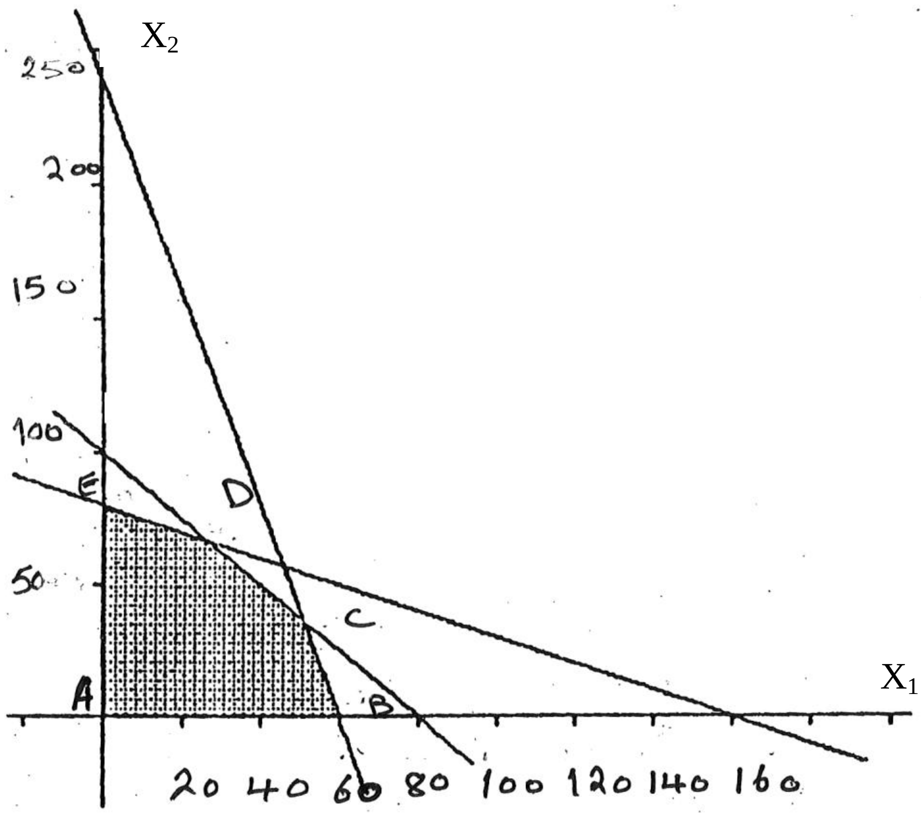
$X_2 = 0$ $\qquad X_1 = \dfrac{120}{2} = 60$

القيد الثالث : $2X_1 + 1.6\ X_2 = 160$

$X_1 = 0$ $\qquad X_2 = \dfrac{160}{1.6} = 100$

$X_2 = 0$ $\qquad X_1 = \dfrac{160}{2} = 80$

٢- التمثيل البيانى



من الرسم السابق يتضح أن نقاط الحلول الأساسية هى

(0 , 80)   E , (20 , 70) D   , (50 , 30) C   , (60 , 0) B   ,   (0 , 0) A

٣- التعويض فى دالة الهدف بالنقاط السابقة

النقطة	احداثياتها	دالة الهدف (Z)
A	(0 , 0)	0
B	(60 , 0)	9000
C	(30 , 50)	10050
D	(20 , 70)	8950
E	(0 , 80)	7225

من الجدول السابق نجد أن النقطة C تمثل الحل الأمثل لأنها تعطى أكبر قيمة لدالة الهدف.

سؤال رقم (٣٦)

تخفيض دالة الهدف الآتية :

Minimize $Z = 40\,X_1 + 32\,X_2$

Subject to :

$$20X_1 + 8\,X_2 \geq 180$$

$$16X_1 + 14X_2 \geq 224$$

$$8X_1 + 34\,X_2 \geq 272$$

$$X_1\,,\,X_2 \geq 0$$

الحـل

١- تحديد النقاط الخاصة بكل قيد

القيد الأول : $20X_1 + 8\,X_2 = 180$

$X_1 = 0$ $\qquad X_2 = \dfrac{180}{2} = 22.5$

$X_2 = 0$ $\qquad X_1 = \dfrac{180}{20} = 9$

القيد الثانى : $16\,X_1 + 14X_2 = 224$

$X_1 = 0$ $\qquad X_2 = \dfrac{224}{14} = 16$

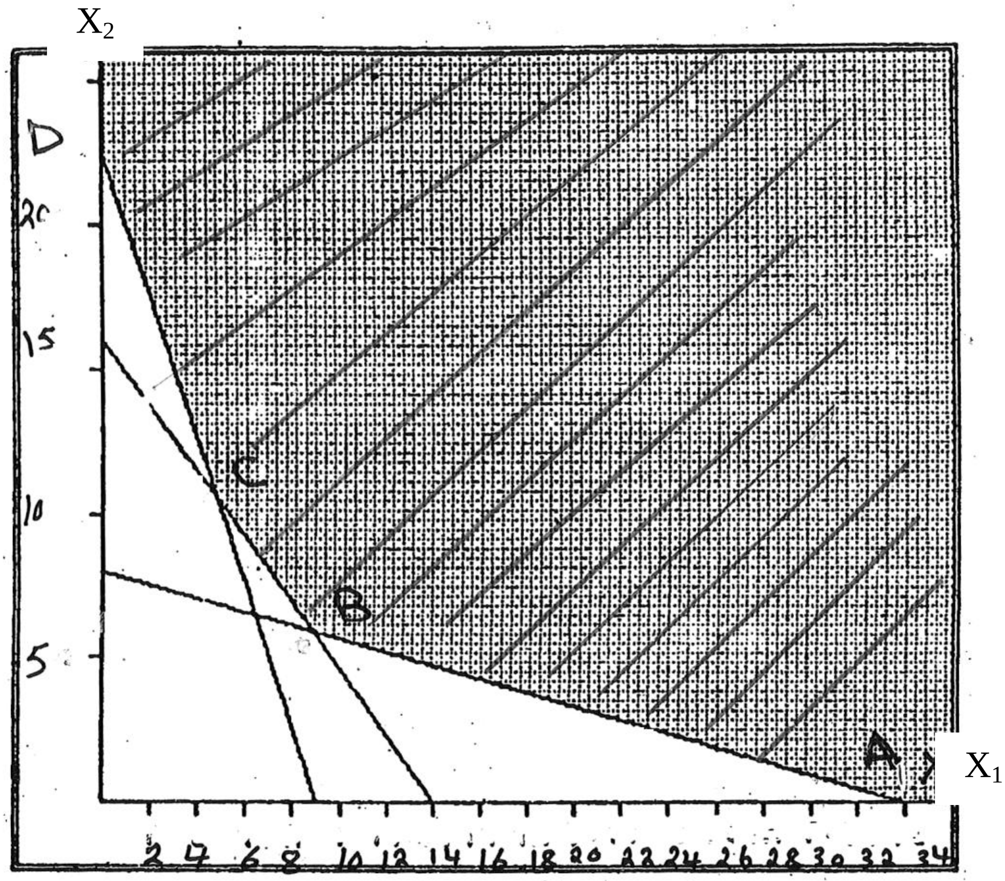
$X_2 = 0$ $\qquad X_1 = \dfrac{224}{16} = 14$

القيد الثالث : $8X_1 + 34\,X_2 = 272$

$X_1 = 0$ $\qquad X_2 = \dfrac{272}{34} = 8$

$X_2 = 0$ $\qquad X_1 = \dfrac{272}{8} = 34$

٢- **التمثيل البيانى**



من الرسم السابق يتضح أن نقاط الحلول الأساسية هى

(0 , 20) D , (4 , 12) C , (10 , 6) B , (34 , 0) A

٣- **التعويض بالنقاط السابقة فى معادلة دالة الهدف**

النقطة	احداثياتها	دالة الهدف (Z)
A	(34 , 0)	1360
B	(10 , 6)	610
C	(4 , 12)	580
D	(0 , 20)	700

والجدول السابق نجد أن نقطة الحل الأمثل هى النقطة C لأنها تعطى أقل قيمة لدالة الهدف.

سؤال رقم (٣٧)

أوجد النـهاية العظمى للبرنامج الخطى التالى

Maximize $\quad Z = 3X_1 + 5X_2$

Subject to :

$$2X_1 + 4X_2 \le 20$$

$$9X_1 + 6X_2 \le 54$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

الحـل

١- تحديد النقاط الخاصة لكل قيد

القيد الأول : $\quad 2X_1 + 4X_2 = 20$

$X_1 = 0 \qquad X_2 = 5$

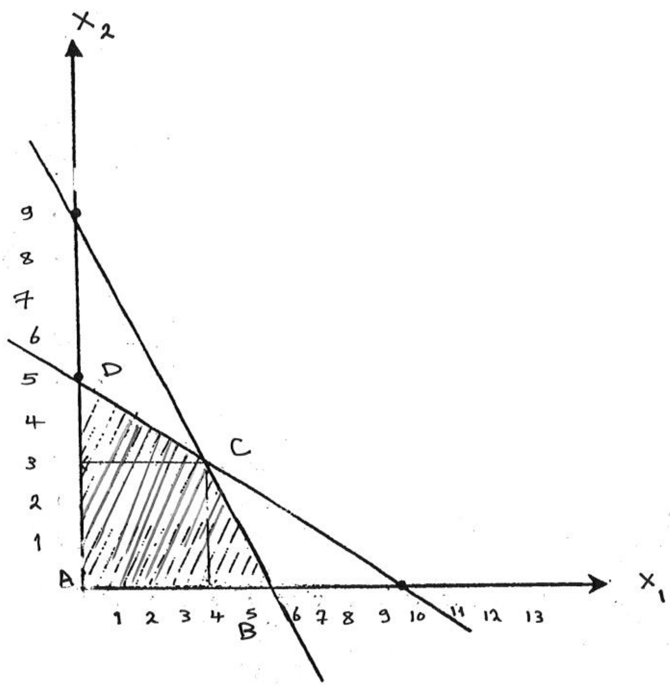
$X_2 = 0 \qquad X_1 = 10$

القيد الثانى : $\quad 9X_1 + 6X_2 = 54$

$X_1 = 0 \qquad X_2 = 9$

$X_2 = 0 \qquad X_1 = 6$

٢- التمثيل البيانى :



من الرسم السابق فإن منطقة الحلول الممكنة هى النقاط

(0 , 5) D , (4 , 3) C , (6 , 0) B , (0 , 0) A

٣- التعويض بالنقاط السابقة فى دالة الهدف

النقطة	احداثياتها	دالة الهدف (Z)
A	(0 , 0)	0
B	(6 , 0)	18
C	(4 , 3)	27
D	(5 , 0)	25

يلاحظ أن هناك نهاية عظمى عند النقطة (C) لأنها تحقق أكبر قيمة لدالة الهدف وهى 27

سؤال رقم (٣٨)

أوجد النهاية الصغرى للبرنامج الخطى التالى

Minimize $\quad Z = 2 X_1 + 5 X_2$

Subject to :

$$X_1 + 2 X_2 \geq 10$$

$$9 X_1 + 6 X_2 \geq 54$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

الحـل

١- تحديد النقاط الخاصة لكل قيد

القيد الأول : $2 X_1 + 4 X_2 = 20$

$X_1 = 0 \qquad X_2 = 5$

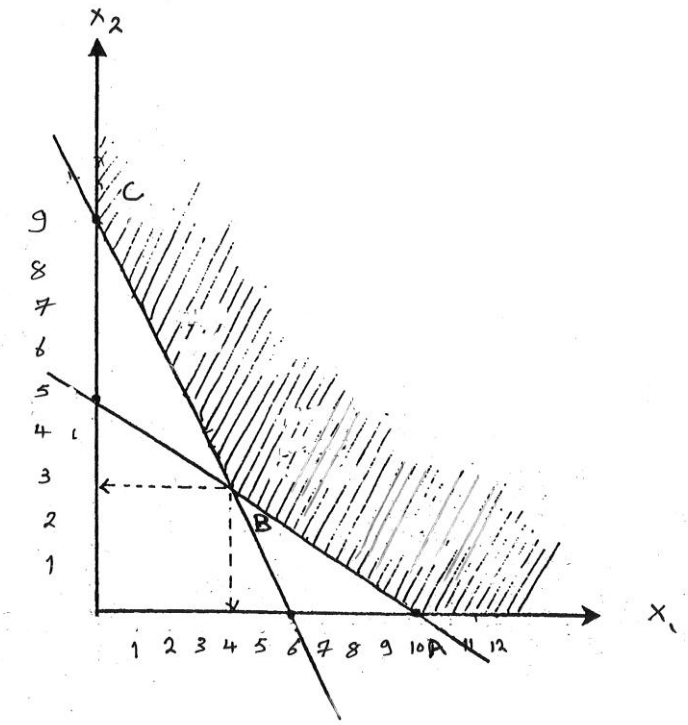
$X_2 = 0 \qquad X_1 = 10$

القيد الثانى : $9 X_1 + 6 X_2 = 54$

$X_1 = 0 \qquad X_2 = 9$

$X_2 = 0 \qquad X_1 = 6$

٢- **التمثيل البيانى**



نقاط الحلول الأساسية هى النقاط

(0 , 9) C , (4 , 3) B , (10 , 0) A

٣- **لإيجاد النهاية الصغرى بالتعويض بالنقاط السابقة فى دالة الهدف**

$Z = 2X_1 + 5\,X_2$

2(10) + 5 (0) = 20	(10 , 0) A
2 (4) + 5 (3) = 23	(4 , 3) B
2 (0) + 5 (9) = 45	(0 , 9) C

نجد أن هناك نهاية صغرى عند النقطة A (10 , 0)

سؤال رقم (٣٩)

Maximize $Z = 40\,X_1 + 60\,X_2$

Subject to :

$2X_1 + 4\,X_2 \le 26$

$5\,X_1 + 3\,X_2 \le 30$

$X_1 , X_2 \ge 0$

الحـل

١- تحديد النقاط الخاصة لكل قيد

القيد الأول : $2 X_1 + 4 X_2 = 26$

$X_1 = 0 \qquad X_2 = 6.5$

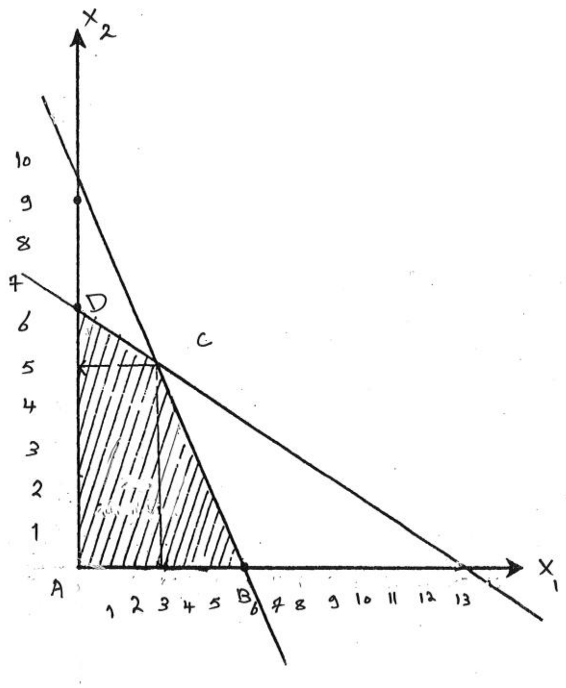
$X_2 = 0 \qquad X_1 = 13$

القيد الثانى : $5 X_1 + 3 X_2 = 30$

$X_1 = 0 \qquad X_2 = 10$

$X_2 = 0 \qquad X_1 = 6$

٢- التمثيل البيانى



من الرسم السابق نقاط الحلول الممكنه هى النقاط

(0 , 6.5) D , (3 , 5) C , (6 , 0) B , (0 , 0) A

وتم ايجاد النقطة C عن طريق حل المعادلتين الآتيتين

$$2X_1 + 4X_2 = 26$$

$$5X_1 + 3X_2 = 30$$

بضرب المعادلة الأولى × 5 ، الثانية × 2

$$10X_1 + 20X_2 = 130$$

$$10X_1 + 6X_2 = 60$$

بالطرح

$$14X_2 = 70 \qquad X_2 = 5$$

وبالتعويض عن X_2 فى المعادلة (١) نحصل على $X_1 = 3$

وبالتالى النقطة C هى (3 , 5)

٣- التعويض بالنقاط السابقة فى دالة الهدف

النقطة	احداثياتها	دالة الهدف (Z)
A	(0 , 0)	0
B	(6 , 0)	240
C	(3 , 5)	420
D	(5 , 6.5)	390

النقطة C (3 , 5) هى التى تحقق أكبر قيمة ممكنه لدالة الهدف وبالتالى تكون هى الحل الأمثل

سؤال رقم (٤٠)

إذا كان لديك البرنامج الخطى التالى فأوجد النهاية العظمى :

Maximize $\quad Z = 200\,X_1 + 500\,X_2$

Subject to :

$$0.3\,X_1 + 0.6\,X_2 \leq 360$$

$$X_1 + 0.8\,X_2 \leq 600$$

$$1.2X_1 + 0.4\,X_2 \leq 600$$

$$X_1\,,\,X_2 \geq 0$$

الحـل

١- تحديد النقاط الخاصة لكل قيد

القيد الأول : $0.3\ X_1 + 0.6\ X_2 = 360$

$X_1 = 0$ $\qquad$ $X_2 = 600$

$X_2 = 0$ $\qquad$ $X_1 = 1200$

القيد الثانى : $X_1 + 0.8\ X_2 = 600$

$X_1 = 0$ $\qquad$ $X_2 = 750$

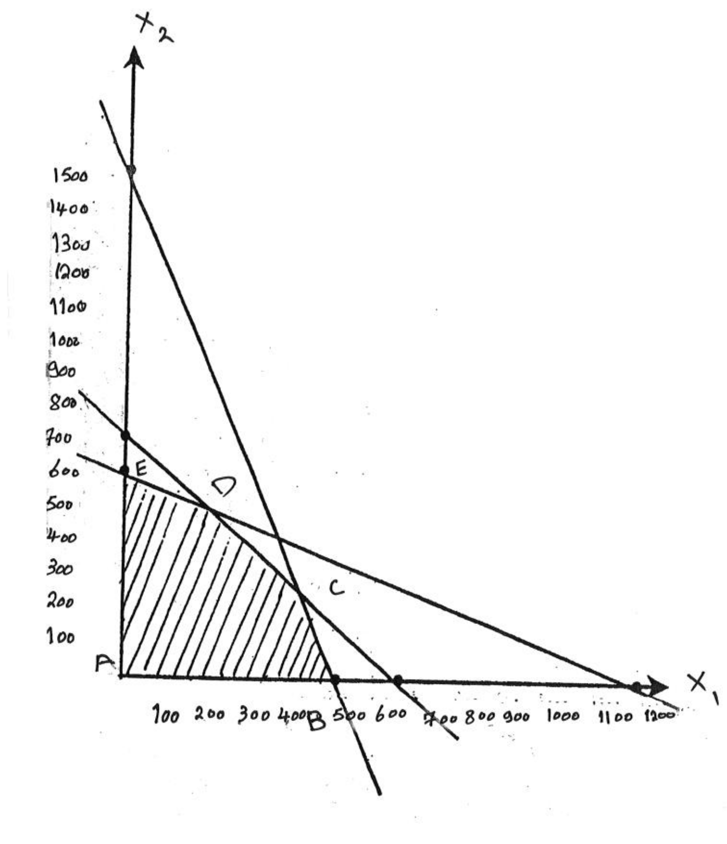
$X_2 = 0$ $\qquad$ $X_1 = 600$

القيد الثالث : $1.2\ X_1 + 0.4X_2 = 600$

$X_1 = 0$ $\qquad$ $X_2 = 7500$

$X_2 = 0$ $\qquad$ $X_1 = 500$

٢- التمثيل البيانى



من الرسم البيانى السابق فإن نقاط الحلول الممكنه هى :

(428.6 , 214.3) C , (500 , 0) B , (0 , 0) A

(0 , 600) E , (0 , 600) D

وتم إيجاد النقطة (C) عن طريق حل المعادلتين :

$X_1 + 0.8 X_2 = 600$

$1.2X_1 + 0.4 X_2 = 600$

بضرب المعادلة الأولى × 1.2 والطرح

$- 0.56 X_2 = - 120$

$X_2 = 214.3$

وبالتعويض فى المعادلة الثانية عن قيمة $X_2 = 214.3$ ينتج قيمة $X_1 = 428.6$

٣- التعويض بالنقاط السابقة فى دالة الهدف :

النقطة	احداثياتها	دالة الهدف (Z)
A	(0 , 0)	0
B	(500 , 0)	10000
C	(428.6 , 214.3)	192870
D	(200 , 500)	290000
E	(0 , 600)	300000

سؤال رقم (٤١)

المطلوب تعظيم دالة الهدف للبرنامج الخطى التالى :

Maximize $Z = 3 X_1 + 7X_2$

Subject to :

$2 X_1 + 4X_2 \leq 16$

$3 X_1 \leq 12$

$5X_2 \leq 15$

$X_1 , X_2 \geq 0$

الحـل

١- تحديد النقاط الخاصة لكل قيد

<u>القيد الأول :</u> $2X_1 + 4X_2 = 16$

$X_2 = 4$ $\quad$ $X_1 = 0$

$X_1 = 8$ $\quad$ $X_2 = 0$

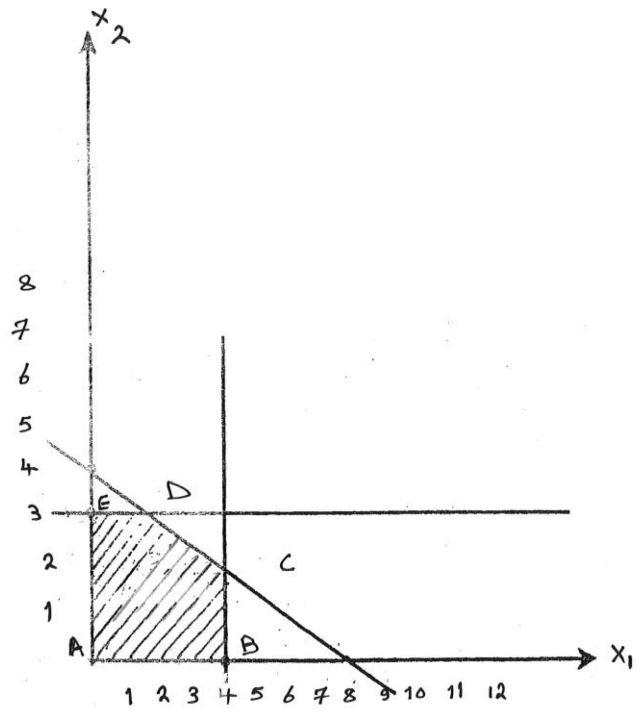
<u>القيد الثانى :</u> $3X_1 = 12$

$X_1 = 4$

<u>القيد الثالث :</u> $5X_2 = 15$

$X_2 = 3$

٢- التمثيل البيانى



من الرسم البيانى السابق فإن نقاط الحلول الممكنه هى :

(0 , 3) E , (2 , 3) D , (4 , 2) C , (4 , 0) B , (0 , 0) A

وبالتعويض بالنقاط السابقة فى دالة الهدف نجد أن النقطة D هى نقطة الحل الأمثل لأنها تعطى أكبر قيمة وهى 27

سؤال رقم (٤٢)

أوجد النهاية الصغرى للبرنامج الخطى التالى :

Minimize $Z = 3X_1 + 4X_2$

Subject to :

$5X_1 + 10X_2 \geq 40$

$10X_1 + 4X_2 \geq 30$

$X_1 , X_2 \geq 0$

الحـل

١- تحديد النقاط الخاصة لكل قيد

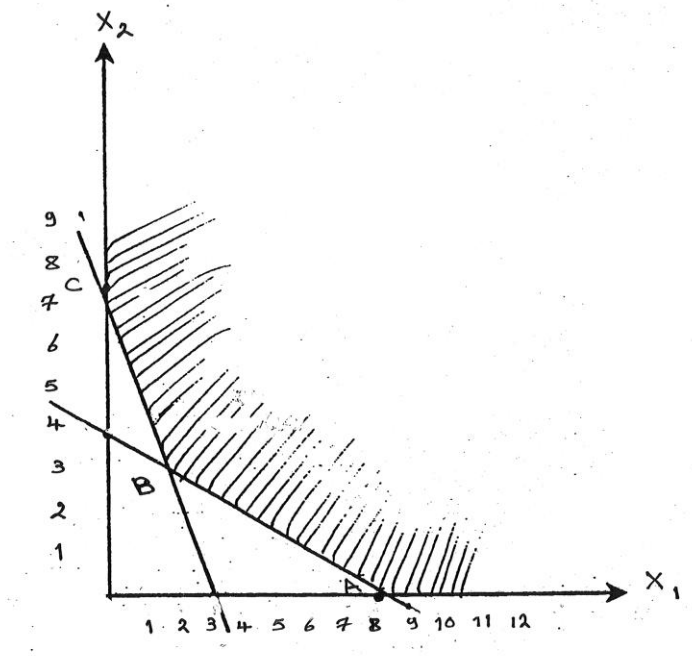
<u>القيد الأول :</u> $5X_1 + 10X_2 = 40$

$X_1 = 0$	$X_2 = 4$
$X_2 = 0$	$X_1 = 8$

<u>القيد الثانى :</u> $10X_1 + 4X_2 = 30$

$X_1 = 0$	$X_2 = 7.5$
$X_2 = 0$	$X_1 = 3$

٢- التمثيل البيانى



من الرسم البيانى السابق فإن نقاط الحلول الأساسية هى :

(0, 7.5) C , (1.75 , 3.125) B , (8 , 0) A

وتم إيجاد النقطة (B) عن طريق حل المعادلتين الآتيتين :

$$5X_1 + 10X_2 = 40$$

$$10 X_1 + 4X_2 = 30$$

بضرب المعادلة الأولى × 2 ثم الطرح

$$X_2 = 3.125$$

وبالتعويض فى المعادلة الأولى عن قيمة X_2 نحصل على قيمة $1.75 = X_1$

وبالتعويض بالنقاط السابقة فى دالة الهدف نجد أن النقطة (B) هى نقطة الحل الأمثل حيث أنها تعطى أقل قيمة لدالة الهدف وهى القيمة 10.25

سؤال رقم (٤٣)

أوجد النهاية الصغرى للبرنامج الخطى التالى :

Minimize $Z = 30 X_1 + 20 X_2$

Subject to :

$$10 X_1 + 20 X_2 \geq 3000$$

$$30X_1 + 20 X_2 \geq 4800$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

الحـل

١- إيجاد النقاط الخاصة لكل قيد

<u>**القيد الأول :**</u> $10 X_1 + 20 X_2 = 3000$

$X_1 = 0$ $X_2 = 150$

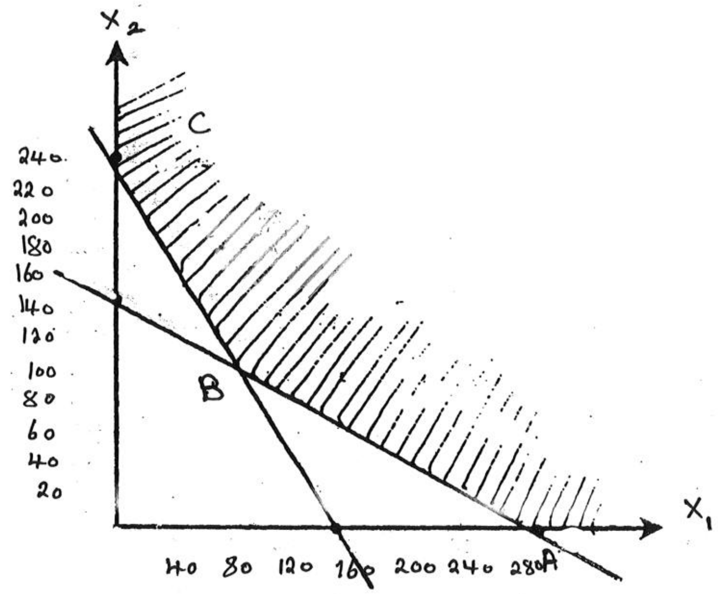
$X_2 = 0$ $X_1 = 300$

القيد الثانى : $30 X_1 + 20 X_2 = 4800$

$X_2 = 240$ $X_1 = 0$

$X_1 = 160$ $X_2 = 0$

٢- التمثيل البيانى



من الرسم السابق نجد أن نقاط الحلول الأساسية هى

(0 , 240) C   ,   (90 , 105) B   ,   (300 , 0) A

وتم إيجاد النقطة (B) عن طريق حل المعادلتين :

$10 X_1 + 20 X_2 = 3000$

$30 X_1 + 20X_2 = 4800$

بالطرح

$X_1 = 90$

وبالتعويض فى المعادلة الأولى عن قيمة X_1 نحصل على $X_2 = 105$

ولإيجاد الحل الأمثل يتم التعويض بالنقاط السابقة فى دالـة الهدف فنجد أن النقطـة (90 , 105) B هى التى تحقق الحل الأمثل لأنها تعطى أقل قيمة لدالة الهدف وهى القيمة 5325

سؤال رقم (٤٤)

أوجد النهاية العظمى للبرنامج الخطى التالى :

Maximize $Z = 500 X_1 + 300 X_2$

Subject to :

$$1.5 X_1 + 3 X_2 \leq 90$$

$$2X_1 + X_2 \leq 80$$

$$- X_1 + X_2 \leq 10$$

$$X_1 \leq 20$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

الحـل

١ – تحديد النقاط الخاصة لكل قيد

<u>القيد الأول :</u> $1.5 X_1 + 3 X_2 = 90$

$X_1 = 0$ $X_2 = 30$

$X_2 = 0$ $X_1 = 60$

<u>القيد الثانى :</u> $2X_1 + X_2 = 80$

$X_1 = 0$ $X_2 = 80$

$X_2 = 0$ $X_1 = 40$

<u>القيد الثالث :</u> $- X_1 + X_2 = 10$

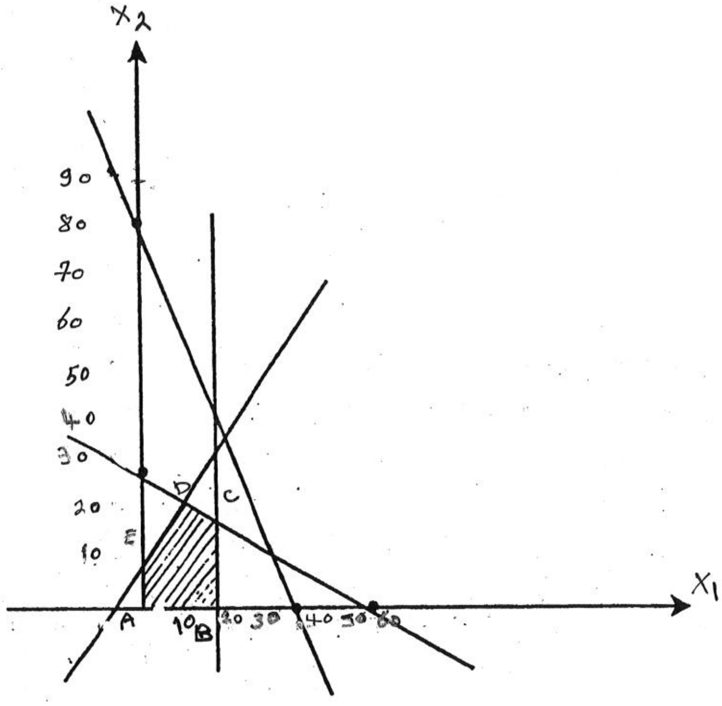
$X_1 = 0$ $X_2 = 10$

$X_2 = 0$ $X_1 = - 10$

<u>القيد الرابع :</u>

$X_1 = 20$

٢ – التمثيل البيانى



من الرسم البيانى السابق فإن نقاط الحلول الأساسية هى :

(20 , 20) C   ,   (20 , 0) B , (0 , 0) A

(0 , 10) E   , (13.3 , 23.3) D

وتم إيجاد النقطة D عن طريق حل المعادلتين

$1.5X_1 + 3\ X_2 = 90$

$-1.5X_1 + 1.5\ X_2 = 15$

بالجمع

$4.5\ X_2 = 1.5$

$X_2 = 23.3$

وبالتعويض عن قيمة X_2 فى المعادلة الأولى نحصل على $X_1 = 13.3$

٣- إيجاد الحل الأمثل

يتم التعويض بالنقاط السابقة فى دالة الهدف فنجد أن النقطة (C) هى التى تعطى أكبر قيمة لدالة الهدف وبالتالى نقطة الحل الأمثل هى النقطة (C) حيث تعطى قيمة 16000 لدالة الهدف.

سؤال رقم (٤٥)

أوجد النهاية الصغرى للبرنامج الخطى التالى

Minimize $\quad Z = 100\,X_1 + 150X_2$

Subject to :

$$5\,X_1 + 10X_2 \geq 40$$

$$2\,X_1 + 2\,X_2 \geq 10$$

$$X_1\,,\,X_2 \geq 0$$

الحـل

١- تحديد النقاط الخاصة لكل قيد

القيد الأول : $5\,X_1 + 10\,X_2 = 40$

$X_1 = 0 \qquad X_2 = 4$

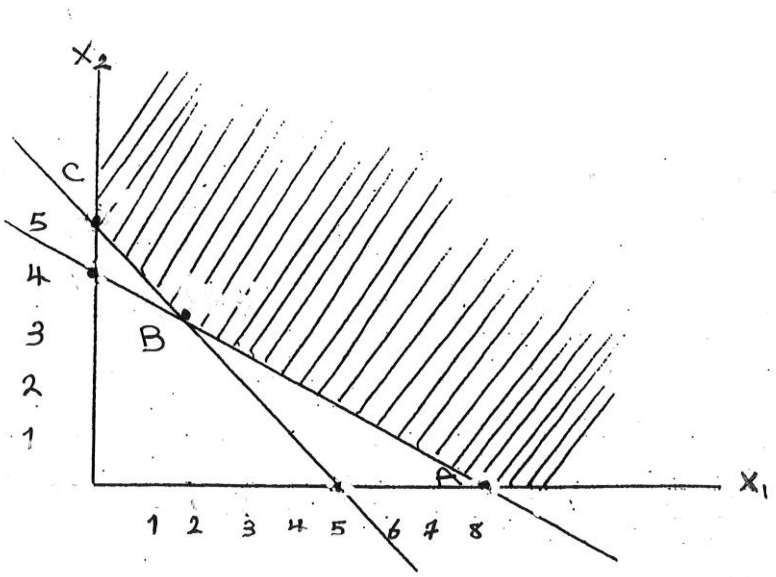
$X_2 = 0 \qquad X_1 = 8$

القيد الثانى : $2X_1 + 2X_2 = 10$

$X_1 = 0 \qquad X_2 = 5$

$X_2 = 0 \qquad X_1 = 5$

٢- التمثيل البيانى



من الرسم البيانى السابق يتضح أن نقاط الحلول الأساسية هى :

$(0, 5)$ C , $(2, 3)$ B , $(8, 0)$ A

٣- التعويض بالنقاط السابقة فى دالة الهدف لإيجاد نقطة الحل الأمثل كما يلى :

النقطة	احداثياتها	دالة الهدف (Z)
A	(8 , 0)	800
B	(2 , 3)	650
C	(0 , 5)	750

من الجدول السابق يتضح أن النقطة B لها أقل قيمة لدالة الهدف وهى 650 وبالتالى هى نقطة الحل الأمثل.

سؤال رقم (٤٦)

إذا كان لديك نموذج البرمجة الخطية التالية

Maximize $Z = 3X_1 + 5X_2 + 2X_3$

Subject to :

$$X_1 + 2X_2 + 2X_3 \leq 10$$

$$2X_1 + 3X_2 + 4X_3 \leq 18$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

والمطلوب : إيجاد الحل الأمثل باستخدام أسلوب السمبلكس

الحـل

١- تحويل نموذج البرمجة الخطية إلى الشكل القياسى كما يلى :

Maximize $Z = 3X_1 + 5X_2 + 2X_3 + 0S_1 + 0S_2$

Subject to :

$$X_1 + 2X_2 + 2X_3 + S_1 = 10$$

$$2X_1 + 3X_2 + 4X_3 + S_2 = 18$$

$$X_1, X_2, X_3, S_1, S_2 \geq 0$$

٢- تكوين جدول الحل الأول

B.V	C	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	Constant	Raito	
		3	5	2	0	0			
S_1	0	1	2	2	1	0	10	$\frac{10}{2}=5$	← Drop
S_2	0	2	3	4	0	1	18	$\frac{18}{3}=6$	
Z		0	0	0	0	0			
C – Z		3	5	2	0	0	0		
			↑Enter						

من الجدول السابق المتغير الداخل فى الحل هو X_2 والخارج هو S_1 ويتقاطع العمود الرئيسى مع الصف الرئيسى عند الرقم الرئيسى وهو (2)

ايجاد قيم صف المتغير الداخل فى الحل X_2 كما يلى :

$$\frac{1}{2}\ ,\ \frac{2}{2}\ ,\ \frac{2}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ \frac{0}{2}\ ,\ \frac{10}{2}$$

$$0.5\ ,\ 1\ ,\ 1\ ,\ 0.5\ ,\ 0\ ,\ 5$$

إيجاد قيم صف S_2 الجديدة

الرقم الجديد = القيم القديمة للصف – قيم الصف الرئيسى الجديد × الرقم الذى يقع فى تقاطع هذا الصف مع العمود الرئيسى.

قيم صف S_2 الجديدة كما يلى :

$$2 - (\frac{1}{2} \times 3) = \frac{1}{2}$$

$$3 - (1 \times 3) = 0$$

$$4 - (1 \times 3) = 1$$

$$0 - (\frac{1}{2} \times 3) = -1.5$$

$$1 - (0 \times 3) = 1$$

$18 - (5 \times 3) = 3$

ويتم تكوين جدول الحل الثانى كما يلى :

B.V	C	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	Constant	Raito	
		3	5	2	0	0			
X_2	5	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	0	5	10	
S_2	0	$\frac{1}{2}$	0	1	$-1\frac{1}{2}$	1	3	6	← Drop
C – Z		$\frac{1}{2}$	0	-3	-2	0	-25		
		↑Enter							

من الجدول السابق الرقم الرئيسى هو الرقم $\frac{1}{2}$

قيم X_1 الجديدة

$$\frac{0.5}{0.5} , \frac{0}{0.5} , \frac{1}{0.5} , \frac{-1.5}{0.5} , \frac{1}{0.5} , \frac{3}{0.5}$$

1 , 0 , 2 , -3 , 2 , 6

قيم صف X_2 الجديدة

$\frac{1}{2} - (1 \times \frac{1}{2}) = 0$

$1 - (0 \times \frac{1}{2}) = 1$

$1 - (2 \times \frac{1}{2}) = 0$

$\frac{1}{2} - (-3 \times \frac{1}{2}) = 2$

$0 - (2 \times \frac{1}{2}) = -1$

$5 - (6 \times \frac{1}{2}) = 2$

يصبح الجدول الثالث كما يلى :

B.V	C	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	Constant	Raito
		3	5	2	0	0		
X_2	5	0	1	0	2	-1	2	
X_1	3	1	0	2	-3	2	6	
C – Z		0	0	-4	-1	-1	-28	

من الجدول السابق جميع عناصر الصف الأخير أصفار وكميات سالبة

الجدول الثالث هو جدول الحل الأمثل وبالتالى يتم انتاج 2 وحدة من X_1 ، 6 وحدة من X_2

ليتحقق ربح قيمته 28

سؤال رقم (٤٧)

حول النموذج التالى إلى النموذج الثنائى:

Minimize $Z = 30 X_1 + 20X_2$

Subject to :

$X_1 + X_2 \geq 15$

$4 X_1 + 2 X_2 \geq 36$

$X_1 + 2 X_2 , \geq 30$

$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$

الحـل

النموذج الثنائى

Maximize $\overline{Z} = 15 y_1 + 36 y_2 + 30 y_3$

Subject to :

$y_1 + 4\ y_2 + 4\ y_3 \leq\ 30$

$y_1 + 2\ y_2 + 2\ y_3\ \leq\ 20$

$y_1\ ,\ y_2\ ,\ y_3\ \geq\ 0$

سؤال رقم (٤٨)

أعد صياغة النموذج التالى للبرمجة الخطية إلى النموذج الثنائى

Minimize $\qquad Z = 6X_1 + 14\ X_2 - 10\ X_3$

Subject to :

$2X_1 + 10X_2 + 2X_3 \geq 8$

$4\ X_1 + 6\ X_3 \leq 4$

$X_1\ ,\ X_2\ ,\ X_3\ \geq\ 0$

الحـل

يتم ضرب القيد الثانى × 1- ليصبح النموذج كما يلى

Minimize $\qquad Z = 6\ X_1 + 14\ X_2 - 10\ X_3$

Subject to :

$2X_1 + 10\ X_2 + 2\ X_3\ \geq\ 8$

$-\ 4\ X_1 - 6\ X_3\ \geq\ -\ 4$

$X_1\ ,\ X_2\ ,\ X_3\ \geq\ 0$

النموذج الثنائى يكون كما يلى :

Maximize $\qquad \overline{Z} = 8\ y_1 - 4\ y_2$

Subject to :

$2y_1 - 4y_2\ \leq\ 6$

$10\ y_1\ \leq\ 14$

$y_1 - 6\ y_2\ \leq\ -\ 10$

$y_1\ ,\ y_2\ ,\ y_3\ \geq\ 0$

سؤال رقم (٤٩)

أعد صياغة النموذج التالى إلى النموذج الثنائى

Maximize $Z = 35\ X_1 + 25X_2 + 30\ X_3$

Subject to :

$$X_1 + 0.5\ X_2 + 1.5\ X_3 \le 40$$

$$2\ X_1 + 2\ X_2 + 0.5\ X_3 \le 120$$

$$1.5X_1 + 2\ X_2 + X_3 \le 80$$

$$X_1 , X_2 , X_3 \ge 0$$

الحـل

Minimize $\overline{Z} = 40\ y_1 + 120\ y_2 + 8\ y_3$

Subject to :

$$y_1 + 2\ y_2 + 1.5\ y_3 \ge 35$$

$$0.5\ y_1 + 2\ y_2 + 2\ y_3 \ge 25$$

$$1.5\ y_1 + 0.5\ y_2 + y_3 \ge 30$$

$$y_1 , y_2 , y_3 \ge 0$$

سؤال رقم (٥٠)

المطلوب تحويل النموذج الثنائى التالى لمشكلة برمجة خطية إلى النموذج الأولى

Maximize $\overline{Z} = 20\ y_1 + 10\ y_2 + 26\ y_3 – 26y_4 – 18\ y_5$

Subject to :

$$2y_1 + 2y_3 – 2y_4 – 2\ y_5 \le 8$$

$$4y_2 + 6\ y_3 – 6\ y_4 \le 6$$

$$10\ y_3 – 10\ y_4 – 4\ y_5 \le 30$$

$$y_1 , y_2 , y_3 , y_4 , y_5 \ge 0$$

الحـل

النموذج الأولى

Minimize $Z = 8X_1 + 6\ X_2 + 30\ X_3$

Subject to :

$2\ X_1 \geq 20$

$4\ X_2 \geq 10$

$2\ X_1 + 6\ X_2 + 10\ X_3 \geq 26$

$-2\ X_1 - 6\ X_2 - 10\ X_3 \geq -26$

$-X_1 - 4\ X_3 \geq -18$

$X_1\ ,\ X_2\ ,\ X_3 \geq 0$

سؤال رقم (٥١)

أعد صياغة البرنامج الخطى التالى إلى الصيغة الثنائية

Minimize $Z = 5\ X_1 + 2\ X_2 + X_3$

Subject to :

$2\ X_1 + 3\ X_2 + X_3 \geq 20$

$6\ X_1 + 8\ X_2 + 5\ X_3 \geq 30$

$7\ X1 + X_2 + 3\ X_3 \geq 40$

$X_1\ ,\ 2\ X_2 + 4\ X_3 \geq 50$

$X_1\ ,\ X_2\ ,\ X_3 \geq 0$

الحـل

النموذج الثنائى

Maximize $\overline{Z} = 20\ y_1 + 30\ y_2 + 40\ y_3 + 50\ y_4$

Subject to :

$$2y_1 + 6\,y_2 + 7\,y_3 + y_4 \;\leq\; 5$$

$$3y_1 \;+ 8\,y_2 + y_3 + 2\,y_4 \;\leq\; 2$$

$$y_1 + 5\,y_2 + 3\,y_3 + 4\,y_4 \;\leq\; 1$$

$$y_1\,,\,y_2\,,\,y_3\,,\,y_4 \;\geq\; 0$$

سؤال رقم (٥٢)

أوجد الصيغة الثنائية للبرنامج الخطى التالى :

Maximize $\quad Z = 2\,X_1 + X_2$

Subject to :

$$X_1 + \;5\,X_2 \;\leq\; 10$$

$$X_1 + 3\,X_2 \;\leq\; 6$$

$$2X_1 + 2\,X_2\,, \leq\; 8$$

$$X_1\,,\,X_2\,,\,X_3 \geq 0$$

الحـل

النموذج الثنائى

Minimize $\quad \overline{Z} = 10\,y_1 + 6\,y_2 + 8\,y_3$

Subject to :

$$y_1 + \;y_2 + 2\,y_3 \geq\; 2$$

$$5y_1 + 3y_2 + 2\,y_3 \;\geq\; 1$$

$$y_1\,,\,y_2\,,\,y_3 \;\geq\; 0$$

سؤال رقم (٥٣)

المطلـوب تخصـيص الطلبيـات الآتيـة علـى الآلات الموجـودة بحيـث يـؤدى ذلـك إلـى تخفيض تكاليف التشغيل الكلى لها أقل ما يمكن والجدول التـالى يوضـح التكـاليف الناتجـة مـن تشغيل أى طلبية على أى آلة من الآلات الموجودة.

الآلات	الطلبيـات			
	1	2	3	4
A	10	12	4	8
B	18	10	2	18
C	2	4	12	2
D	14	12	30	24

الحـل

١- يتم طرح أقل قيمة فى كل عمود من باقى القىيم فى ذلك العمود كما يلى :

الآلات	الطلبيـات			
	1	2	3	4
A	8	8	2	6
B	16	6	0	16
C	0	0	10	0
D	12	8	28	22

٢- يتم طرح أقل قيمة فى كل صف من باقى القيم فى ذلك الصف مع تغطية كل صف وكل عمود يحتوى على صفر فأكثر بأقل عدد ممكن من الخطوط كما يلى :

الآلات	الطلبيـات			
	1	2	3	4
A	6	6	0	4
B	16	6	0	16
C	0	0	10	0
D	4	0	20	14

مما سبق يتضح أن عدد الخطوط = 3 ، عدد الصفوف = عدد الأعمدة = 4 وبالتالى فإن عدد الخطوط الأفقية والرأسية أقل من عدد الصفوف وبالتالى نختار أقل قيمة من القيم غير المغطاه ونطرحها من باقى القيم المغطاه ونضيفها إلى نقاط تقاطع المستقيمات كما يلى :

الآلات	الطلبيـات			
	1	2	3	4
A	2	6	0	0
B	12	6	0	12
C	0	4	14	0
D	0	0	20	5

عدد الخطوط = عدد الصفوف = عدد الأعمدة = 4

يتم التخصيص كما يلى :

تخصيص الطلبية (4) للآلة A

تخصيص الطلبية (3) للآلة B

تخصيص الطلبية (1) للآلة C

تخصيص الطلبية (2) للآلة D

ولحساب أقل التكاليف الناتجة من هذا التخصيص

أقل تكلفة = A4 + B3 + C1 + D2

8 + 2 + 2 + 2 + 12 = 26

سؤال رقم (٥٤)

بفرض أن هناك ثلاثة عمال للقيام بثلاثة من الأعمال ويوضح الجدول التالى تكاليف قيام كل عامل بعمل معين كما يلى :

العمال	الأعمال		
	A	B	C
1	8	2	6
2	5	6	4
3	7	3	4

والمطلوب : أوجد أفضل تخصيص لتخفيض التكاليف.

الحـل

١- طرح الصفوف

العمال	الأعمال		
	A	B	C
1	6	0	4
2	1	2	0
3	4	0	1

٢- طرح الأعمدة

اختيار أقل قيمة فى كل عمود وطرحها من باقى القيم فى العمود وتغطية الأصفار كما يلى :

العمال	الأعمال		
	A	B	C
1	5	0	4
2	0	2	0
3	3	0	1

عدد الخطوط أقل من عدد الصفوف والأعمدة وبالتالى نختار أقل قيمة من القيم غير المغطاه وهى القيمة (1) ونطرحها من باقى القيم المغطاه ونضيفها على نقاط تقاطع الخطوط كما يلى:

العمال	الأعمال		
	A	B	C
1	4	0	3
2	0	3	0
3	2	0	0

من الجدول السابق عدد الخطوط = عدد الصفوف والأعمدة

ونجد أن التخصيص الذى يؤدى إلى أقل تكلفة هو :

B1

A2

C3

وبالتالى اجمالى التكاليف = B1 + A2 + C3

2+ 5 + 4 = 11

سؤال رقم (٥٥)

وردت ثلاثة طلبيات إلى أحد الأقسام الانتاجية بشركة معينـة والجدول التـالى يوضـح تكـاليف تشـغيل هذه الطلبيـات علـى الآلات المختلفـة والمطلـوب تخصيص هذه الطلبيـات علـى الآلات بحيث تكون تكاليف التشغيل الكلية أقل ما يمكن.

الآلات	الطلبيـات		
	1	2	3
A	30	20	32
B	24	20	20
C	16	24	28

الحـل

١- طرح الصفوف

الآلات	الطلبيـات		
	1	2	3
A	10	0	0
B	4	0	0
C	0	8	12

٢- طرح الأعمدة وتغطية الأصفار :

الآلات	الطلبيـات		
	1	2	3
A	10	0	0
B	4	0	0
C	0	8	12

مما سبق يتضح أن عدد الخطوط = عدد الصفوف والأعمدة = 3

وبالتالى فإن التخصيصات التى تؤدى إلى أقل التكاليف هى

C1 + A2 + B3

واجمالى التكاليف= 14 = 4 + 5 + 5

سؤال رقم (٥٦)

المطلوب تخصيص الطلبيات الآتية على الآلات الموجودة بحيث تزداد اجمالى الأرباح إلى أكبر حجم ممكن مع تحديد هذه الأرباح والجدول التالى يوضح الأرباح الناتجة من تشغيل أى طلبية من الطلبيات على آى آلة من الآلات الموجودة.

الآلات	الطلبيات		
	1	2	3
A	130	144	128
B	96	150	120
C	116	124	130

الحل

١- يتم اختيار أكبر رقم فى الجدول وهو 150 ويتم طرح جميع الأرقام منه كما يلى :

الآلات	الطلبيات		
	1	2	3
A	20	6	22
B	54	0	30
C	34	26	20

٢- يتم طرح الصفوف

الآلات	الطلبيـات		
	1	2	3
A	14	0	16
B	54	0	30
C	14	6	0

٣- طرح الأعمدة :

يتم طرح أقل قيمة فى كل عمود من باقى القيم وتغطية الأصفار :

الآلات	الطلبيـات		
	1	2	3
A	0	0	16
B	20	0	30
C	0	6	0

عدد الخطوط = عدد الصفوف = عدد الأعمدة = 3

وبالتالى فإن أفضل تخصيص هو :

A1 + B2 + C3

وأجمالى الأرباح 410 = 130 + 150 + 130

سؤال رقم (٥٧)

شركة لديها مجموعة من العمال للقيام بعدد من الأعمال فإذا كانت الأرباح الناتجة عن القيام بهذه الأعمال موضحة بالجدول التالى :

الأعمال				العمال
4	3	2	1	
16	14	18	10	A
10	6	4	6	B
20	20	18	14	C
8	12	10	12	D

والمطلوب : إيجاد التخصيص الأمثل وحساب إجمالى الأرباح.

الحـل

اختيار أكبر رقم فى الجدول وطرح كل الأرقام الأخرى كما يلى :

الأعمال				العمال
4	3	2	1	
4	6	2	10	A
10	14	16	14	B
0	0	2	6	C
12	8	10	8	D

٢- يتم طرح أقل قيمة من كل صف وأقل قيمة من كل عمود وتغطية الأصفار كما يلى :

العمال	الأعمـال			
	1	2	3	4
A	8	0	4	2
B	4	6	4	0
C	4	2	0	0
D	0	2	0	4

عدد الخطوط = عدد الصفوف = عدد الأعمدة = 4

التخصيص الأمثل هو

A2 , B4 , C3 , D1

واجمالى الأرباح تكون كما يلى :

$18 + 10 + 20 + 12 = 60$

سؤال رقم (٥٨)

شركة لديها أربعة أنواع من السلع ولديها أربعة مخازن والجدول التالى يوضح قيم الأرباح الناتجة من تخزين هذه السلع فى المخازن كما يلى :

السلع	المخـازن			
	S_1	S_2	S_3	S_4
A	18	45	12	15
B	27	21	18	3
C	15	33	3	21
D	42	54	27	30

والمطلوب : حساب أكبر قدر من الأرباح يمكن الحصول عليه عند تخزين السلع

الحـل

١– يتم اختيار أكبر رقم وهو 54 وطرح جميع الأرقام منه

السلع	المخازن			
	S_1	S_2	S_3	S_4
A	36	9	42	39
B	27	33	36	51
C	39	21	51	33
D	12	0	27	24

٢– يتم طرح أقل رقم من كل صف عن باقى أرقام الصف

السلع	المخازن			
	S_1	S_2	S_3	S_4
A	27	0	33	30
B	0	6	9	24
C	18	0	30	12
D	12	0	27	24

٣– طرح أقل رقم فى كل عمود من باقى أرقام العمود وتغطية الأصفار

السلع	المخازن			
	S_1	S_2	S_3	S_4
A	27	0	24	18
B	0	6	0	12
C	18	0	21	0
D	12	0	18	12

عدد الخطوط أقل من عدد الصفوف أو الأعمدة

وبالتالى يتم اختيار أقل رقم من الأرقام غير المغطاه وهو 12 وطرحه من جميع الأرقام المغطاه وإضافته إلى نقاط تقاطع الخطوط كما يلى :

السلع	المخـازن			
	S_1	S_2	S_3	S_4
A	15	0	12	6
B	0	18	0	12
C	18	12	21	0
D	0	0	15	0

عدد الخطوط = عدد الصفوف = عدد الأعمدة = 4

وأفضل تخصيص يكون كما يلى :

A2 , B3 , C4 , D1

مجموع الأرباح 126 = 42 + 21 + 18 + 45

سؤال رقم (٥٩)

الجدول التالى يوضح تكاليف نقل الوحدة الواحدة من سلعة معينـة من ثلاثـة مصانـع إلى ثلاثة أسواق مختلفة ويوضح الجدول أيضا امكانيات كل مصنع واحتياجات الأسواق.

الأسواق / المصانع	**d_1**	**d_2**	**d_3**	**supply**
F_1	10	2	16	24
F_2	4	8	0	28
F_3	6	12	14	8
Demand	18	20	22	60

المطلوب تحديد سياسة نقل السلع إلى الأسواق الثلاثة باستخدام طريقة الركن الشمالى الغربى NECM

الحـل

الأسواق / **المصانع**	**d_1**	**d_2**	**d_3**	**supply**
F_1	10 18	2 6	16	~~24~~ ~~6~~ 0
F_2	4	8 14	0 14	~~28~~ ~~14~~ 0
F_3	6	12	14 8	~~8~~ 0
Demand	~~18~~ 0	~~20~~ ~~14~~ 0	~~22~~ ~~8~~ 0	60

اجمالى تكاليف النقل = 10 x 18 + 2 x 6 + 8 x 14 + 0 x 14 + 14 x 8

= 180 + 12 + 112 + 0 + 112 = 416

سؤال رقم (٦٠)

المطلوب حل التمرين السابق بطريقة أقل تكلفة LCM

الحـل

الأسواق / المصانع	d_1	d_2	d_3	supply
F_1	10 4	2 20	16	~~24~~ ~~4~~ 0
F_2	4 6	8	0 22	~~28~~ ~~6~~ 0
F_3	6 8	12	14	~~8~~ 0
Demand	~~18~~ ~~12~~ ~~4~~ 0	~~20~~ 0	~~22~~ 0	

إجمالى التكاليف = 10 x 4 + 2 x 20 + 4 x 6 + 0 x 22 + 6 x 8

40 + 40 + 24 + 0 + 48 = 152

سؤال رقم (٦١)

المطلوب استخدام طريقة فوجيل التقريبية لحساب إجمالى التكاليف باستخدام بيانات التمرين السابق

الحـل

الأسواق / المصانع	d_1	d_2	d_3	supply	Diff
F_1	10	2	16	24	8
F_2	4	8	0	28	4
F_3	6	12	14	8	6
Demand	18	20	22	60	
Diff	2	6	14		

من الجدول السابق نجد أن :

العمود الثالث له أكبر فرق وهو الرقم 14 وأقل تكلفة فى هذا العمود

هى للخلية F_2d_3 وهى تساوى صفر

ويتم مقارنة احتياجات مركز الطلب d_3 مع الكمية المتاحة فى المصنع F_2

ثم نختار أقل الكميتين وهى 22 كما فى الجدول التالى

الأسواق / المصانع	**d_1**	**d_2**	**d_3**	**supply**	**Diff**
F_1	10	2	16	24	8
F_2	4	8	0 22	~~28~~ 6	4
F_3	6	12	14	8	6
Demand	18	20	~~22~~ 0		
Diff	2	6			

من الجدول السابق يتم تعديل الطلب والعرض مما يؤدى إلى تلبيه احتياجات المركز d_3 ويتم استبعاده من الجدول واعادة حساب الفروق بين التكاليف مرة أخرى ليصبح الجدول كما يلى

الأسواق / المصانع	**d_1**	**d_2**	**d_3**	**supply**	**Diff**
F_1	10	2 20	16	~~24~~ 4	8
F_2	4	8	0 22	~~28~~ 6	4
F_3	6	12	14	8	6
Demand	18	20	22	60	
Diff	2				

من الجدول السابق يتضح أن هناك مركز طلب واحد هو d_1 لم يحصل على احتياجاته وبالتالى لا نحتاج لحساب الفرق فى التكلفة للصفوف والأعمدة ويصبح الجدول كما يلى :

الأسواق / المصانع	**d_1**	**d_2**	**d_3**	**supply**
F_1	10 / 4	2 / 20	16	
F_2	4 / 6	8	0 / 22	
F_3	6 / 8	12	14	
Demand				

اجمالى التكاليف للنقل = 10 x 4 + 2 x 20 + 4 x 6 + 0 x 22 + 6 x 8

40 + 40 + 24 + 0 + 48 = 152